兰州大学 管理学院

School of Management ,Lanzhou University

第二讲　运筹学基础模型

宗胜亮

zongshl@lzu.edu.cn

Data

Models & Decisions

课程知识结构导航

纵横运筹学

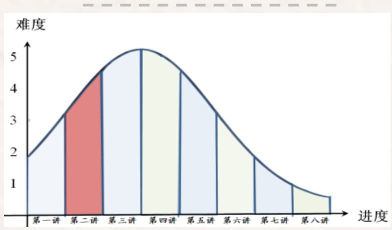
理论分析

数据、模型、决策

不确定型决策

风险型决策

确定型决策



运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之一百法则
相差值分析

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划
运输模型
目标规划模型
网络最优化模型

最短路模型
最小费用流模型
最大流模型
最小支撑树模型

生产安排问题
排班问题
套裁下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运问题模型

有优先级目标规划
加权目标规划

前章回顾

不会求解不好解决---案例2

依据不足不好解决---案例3

过于复杂不好解决---案例4

解决的途径:

理论解析------方法------操作

决策类型

<table>
<tr><td>不确定型决策</td><td rowspan="3">方法</td><td rowspan="3">操作</td></tr>
<tr><td>风险型决策</td></tr>
<tr><td>确定型决策</td></tr>
</table>

不确定型决策方法

决策者知道将面对的一些自然状态，并知道将采用的几种行动方案，以及在各个不同的自然状态下所获得的相应的收益值，但决策者不能预先估计或计算出各种自然状态出现的可能性（概率）。

解决方法：

- 最大最小准则
- 最大最大准则
- 等可能性准则
- 乐观系数准则
- 后 悔 值准则

最大最小准则

决策者从最不利的角度去考虑问题，先选出每个方案在不同自然状态下的最小收益值，再从这些最小收益值中选取一个最大值，从而确定最优行动方案——悲观准则。

最大最小准则

最大最小准则数学表述模型

$$Z=\max_{1\le i\le n}\left[\min_{1\le j\le m}\left(a_{ij}\right)\right]$$

其中：a_{ij}为收益表中第i个决策方案、第j个自然状态下的收益值

不确定型决策方法

最大最小准则

例2.1 某公司现需对某新产品生产批量做出决策，现有四种备选行动方案：S_1、S_2、S_3、S_4。未来市场对这种产品的需求情况有三种可能发生的自然状态：N_1、N_2、N_3。经估计，采用某一行动方案而实际发生某一自然状态时，公司的收益如下表所示，请用最大最小准则做出决策。

单位:万元

自然状态N_j a_{ij} 行动方案S_i	N_1 (需量大)	N_2 (需量中)	N_3 (需量小)	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[\min\limits_{1\le j\le 3}\left(a_{ij}\right)\right]$
S_1（大批生产）	12	14	13	12
S_2（中批生产）	15	17	14	14（max）
S_3（小批生产）	13	15	18	13
S_4（微量生产）	10	16	12	10

最大最大准则

决策者从最有利的角度去考虑问题，先找出每个方案在不同自然状态下最大的收益值，再从这些最大收益值中选取一个最大值，相应的方案为最优方案——乐观准则。

最大最大准则

最大最大准则数学表述模型

$$Z = \max_{1 \le i \le n}\left[\max_{1 \le j \le m}\left(a_{ij}\right)\right]$$

其中：a_{ij}为收益表中第i个决策方案、第j个自然状态下的收益值

不确定型决策方法

最大最大准则

最大最大准则收益表

单位:万元

自然状态N_j / a_{ij} / 行动方案S_i	N_1（需量大）	N_2（需量中）	N_3（需量小）	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[\max\limits_{1\le j\le 3}\left(a_{ij}\right)\right]$
S_1（大批生产）	12	14	13	14
S_2（中批生产）	15	17	14	17
S_3（小批生产）	13	15	18	18（max）
S_4（微量生产）	10	16	12	16

等可能性准则

决策者把各自然状态发生的可能性看成是相同的，即每个自然状态发生的概率都是 **1/自然状态数**。这样决策者可以计算各行动方案的收益期望值。然后在所有这些期望值中选择最大的，以它对应的行动方案为最优方案。

等可能性准则

等可能性准则数学表述模型

$$Z=\max_{1\le i\le n}\left[E\left(S_i\right)\right]=\max_{1\le i\le n}\left[\sum_{1\le j\le m}\left(p_j\times a_{ij}\right)\right]$$

其中： a_{ij}为收益表中第i个决策方案、第j个自然状态下的收益值

p_j为各自然状态的相等概率

等可能性准则

等可能性准则收益表

单位:万元

收益值 a_{ij} / 方案 S_i / 自然状态 N_j / 概率 P_j	N_1 (大)	N_2 (中)	N_3 (小)	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[E\left(S_i\right)\right]$
	1/3	1/3	1/3	
S_1(大批量生产)	12	14	13	13
S_2(中批量生产)	15	17	14	15.333（max）
S_3(小批量生产)	13	15	18	15.333（max）
S_4(微量生产)	10	16	12	12.667

乐观系数准则

决策者根据经验，确定一个乐观系数α（$0\le \alpha \le 1$），利用公式

$$Z = \max_{1\le i\le n}\left[\alpha \max_{1\le j\le m}\left(a_{ij}\right)+\left(1-\alpha\right)\min_{1\le j\le m}\left(a_{ij}\right)\right]$$

先计算出方案S_i的折中准则下的收益值，然后在所有方案折中准则中选出收益值最大的方案确定为最优方案。

当$\alpha=1$时，为乐观准则

当$\alpha=0$时，为悲观准则

乐观系数准则

乐观系数准则收益表（ α=0.7 ）

单位:万元

自然状态 N_j / 收益值 a_{ij} / α / 方案S_i	N_1 (大)	N_2 (中)	N_3 (小)	折中收益值
	0.7			
S_1(大批量生产)	12	14	13	13.4
S_2(中批量生产)	15	17	14	16.1
S_3(小批量生产)	13	15	18	16.5（max）
S_4(微量生产)	10	16	12	14.2

后悔值准则

将各自然状态下的最大收益值定为理想目标，并将该状态中的其它值与最高值之差称为未达到理想目标的后悔值，然后从各方案中的最大后悔值中取一个最小的，相应的方案为最优方案——沙万奇准则。

后悔值准则

后悔值准则数学表述模型

$$Z=\min_{1\le i\le n}\left[\max_{1\le j\le m}\left(a'_{ij}\right)\right]$$

$$a'_{ij}=\left[\max_{1\le i\le n}\left(a_{ij}\right)-a_{ij}\right]$$

其中：a_{ij}为收益表中第i个决策方案、第j个自然状态下的收益值

后悔值准则

由原收益表创建后悔表

单位:万元

自然状态N_j / a_{ij} / 行动方案S_i	N_1 (需量大)	N_2 (需量中)	N_3 (需量小)	$Z=\min\limits_{1\le i\le 4}\left[\max\limits_{1\le j\le 3}(a'_{ij})\right]$
S_1（大批生产）	3 12	3 14	5 13	
S_2（中批生产）	0 15	0 17	4 14	
S_3（小批生产）	2 13	2 15	0 18	
S_4（微量生产）	5 10	1 16	6 12	

不确定型决策方法

后悔值准则

由原收益表创建后悔表

单位:万元

自然状态N_j a'_{ij} 行动方案S_i	N_1（需量大）	N_2（需量中）	N_3（需量小）	$Z=\min\limits_{1\le i\le 4}\left[\max\limits_{1\le j\le 3}(a'_{ij})\right]$
S_1（大批生产）	3	3	5	5
S_2（中批生产）	0	0	4	4
S_3（小批生产）	2	2	0	2（min）
S_4（微量生产）	5	1	6	6

课堂练习1

决策问题的后悔值准则决策结果　　单位：元

后悔值 状态 方案	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	后悔值准则
S_1	0	6	0	11	4	11←
S_2	7	0	26	18	11	26
S_3	16	6	11	27	0	27
S_4	30	24	4	0	25	30

已知S_1为最优方案，请还原该决策问题的收益表。

课堂练习1

该决策问题的收益表　　单位：元

收益值 状态 方案	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
S_1	50	36	46	42	42
S_2					
S_3					
S_4					

案例解答

案例1.3 是一个典型的不确定型决策问题。决策方法如下：

单位：万美元

土地状况 / 收益 / 备选方案	有石油	干涸	最大最小准则	最大最大准则	等可能性准则	乐观系数准则(0.7)
开采石油	650	-150	-150	650	250	410
出售土地	90	90	90	90	90	90

后悔表

	有石油	干涸	后悔值准则
开采石油	0	240	240
出售土地	560	0	560

课堂练习2

某企业有一新产品投放市场，在生产方面面临三种方案可以选择：扩建、新建和外包。新产品的市场需求量有四种可能：需求量大、需求量适中、需求量小和失败，而新产品投放市场后需求量状况本企业还一无所知，只知道五年内的总收益情况如下表。

五年内总的收益情况表　　　　单位：万元

	市场需求量			
	大	中	小	失败
扩建	50	25	10	-15
新建	70	30	-10	-40
外包	30	15	-5	-10

试分别用乐观准则、悲观准则、等可能性准则、乐观系数（0.6）准则和后悔值准则进行决策。

决策类型

<table>
<tr><td>不确定型决策</td><td rowspan="3">方法</td><td rowspan="3">操作</td></tr>
<tr><td>风险型决策</td></tr>
<tr><td>确定型决策</td></tr>
</table>

不确定型决策操作

数学模型是一个独立公式

手工求解可以直接在收益表中操作

可以用Excel程序和模板在计算机上操作求解

决策类型

<table>
<tr><td>不确定型决策</td><td rowspan="3">方法</td><td rowspan="3">操作</td></tr>
<tr><td>风险型决策</td></tr>
<tr><td>确定型决策</td></tr>
</table>

风险型决策

决策者在目标明确的前提下，对客观情况并不完全了解，存在事实上决策者无法控制的两种或两种以上的自然状态，但对于每种自然状态出现的概率大体可以估计，并可算出在不同状态下的收益值。

解决方法：

- **期望值准则**
- **决策树法**
- **效用值准则**

期望值准则

把每个方案在各种自然状态下的收益值看成不相关的数量因素，从而获得每个方案的收益值的数学期望，加以比较，选取一个数学期望收益值最大的行动方案为最优方案。

期望值准则

期望值准则数学表述模型

$$Z=\max_{1\le i\le n}\left[E\left(S_i\right)\right]=\max_{1\le i\le n}\left[\sum_{1\le j\le m}\left(p_j\times a_{ij}\right)\right]$$

其中：a_{ij}为收益表中第i个决策方案、第j个自然状态下的收益值

p_j为各自然状态的可能概率

该决策模型与等可能性准则相同之处就是自然状态的概率

仍符合：$\sum p_j=1$

期望值准则

例2.2 在例2.1的基础上，根据经验估计出需求量N_j这些自然状态出现的概率P_j，用期望值准则进行决策。

单位:万元

自然状态 N_j / 概率 P_j / 收益值 a_{ij} / 方案S_i	N_1 (需求量大)	N_2 (需求量中)	N_3 (需求量小)
	0.2	0.5	0.3
S_1(大批量生产)	12	14	13
S_2(中批量生产)	15	17	14
S_3(小批量生产)	13	15	18
S_4(微量生产)	10	16	12

风险型决策方法与操作

期望值准则

期望值准则收益表

单位:万元

收益值 a_{ij} / 自然状态 N_j / 概率 P_j / 方案S_i	N_1 (大)	N_2 (中)	N_3 (小)	$Z=\max\limits_{1\le i\le 4}\left[E\left(S_i\right)\right]$
	0.2	0.5	0.3	
S_1(大批量生产)	12	14	13	13.3
S_2(中批量生产)	15	17	14	15.7（max）
S_3(小批量生产)	13	15	18	15.5
S_4(微量生产)	10	16	12	13.6

期望值准则

计算机操作

运筹学模型求解系统------期望值准

自然状态数: 3　　决策方案数: 4　　求 解

	自然状态	N1	N2	N3	
	事件概率	0.2	0.5	0.3	收益值
行动方案	S1	12	14	13	13.3
	S2	15	17	14	15.7 ←
	S3	13	15	18	15.5
	S4	10	16	12	13.6

最优值 15.7

问题讨论1

一个经营良种批发业务的种子商店，准备订购一批种子供下周销售，种子的包装规格为50公斤/袋。据以往经验，每周的销售量可能为50，100，150，200，250公斤(不拆袋)。每公斤种子的订购价6元，销售价9元，销售不完剩余的种子必须以3元价格按一般商品处理。

1.请创建该决策问题的收益表；

2.分别用最大最小、最大最大、等可能性、乐观系数（0.6）和后悔值准则进行决策；

3.若5种销量的可能分别为0.1、0.3、0.2、0.1、0.3，请用期望值准则决策。

若可以拆袋为每公斤进货，又该如何创建收益表和决策？

决策树法

Decision tree

风险型决策方法与操作

决策树是由决策点、事件点及结果构成的树形图，一般应用于序列决策中。

□：表示决策点，也称为树根，由它引发的分枝称之为方案分枝，方案节点被称为树枝，n条分枝表示有n种供选方案。

○：表示策略点，其上方数字表示该方案的最优收益期望值，由其引出的m条线称为概率枝表示有m种自然状态，其发生的概率已标明在分枝上。

△：表示每个方案在相应自然状态下的效益值。

╫：表示经过比较选择此方案被删除掉了，称之为剪枝。

方法：

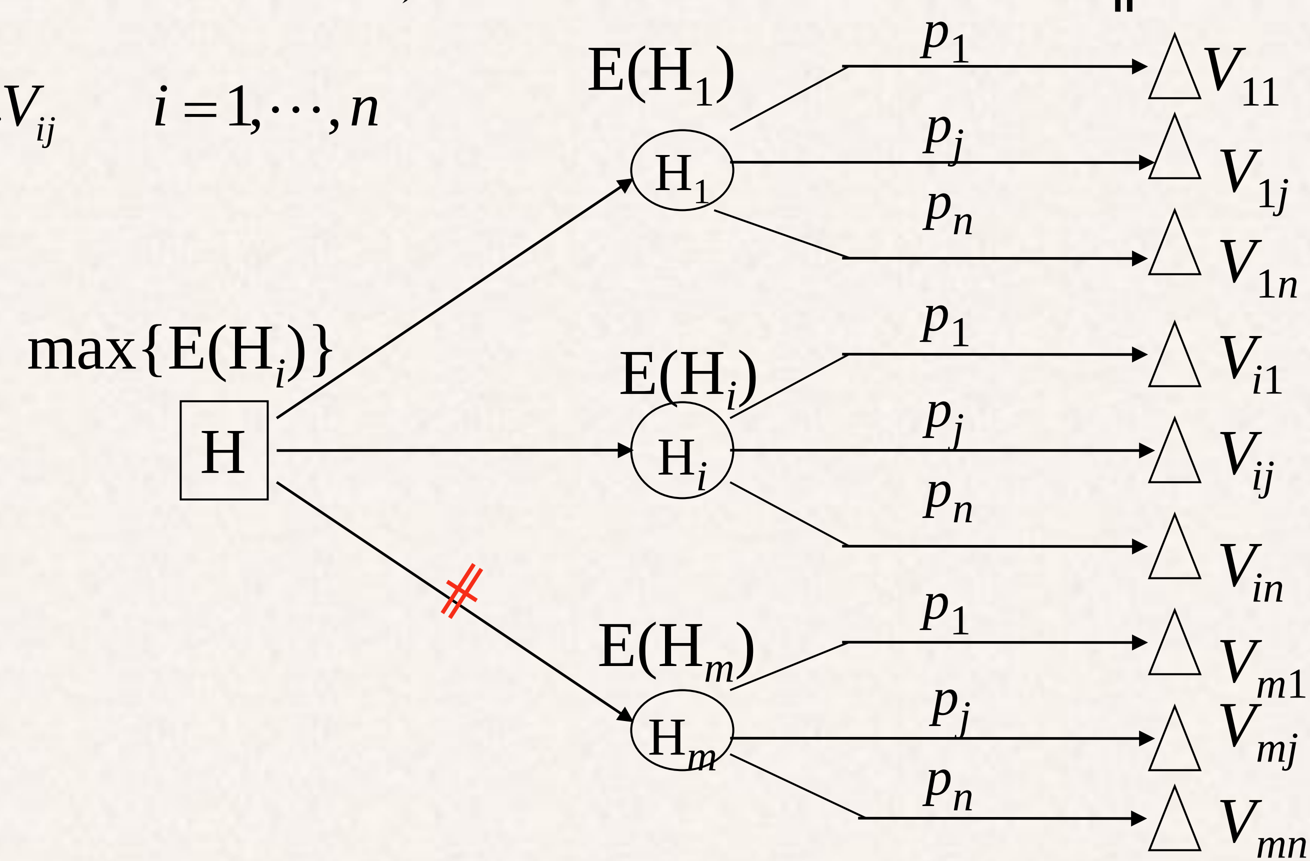
① 根据题意作出决策树图；

风险型决策方法与操作

② 从右向左计算各方案期望值，并进行标注；

③ 对期望值进行比较，选出最大效益期望值，写在□上方，表明其所对应方案为决策方案，同时在其它方案上打上╫删除。

$$E(H_i)=\sum_{j=1}^{n} p_j V_{ij} \qquad i=1,\cdots,n$$



例2.3 某厂决定生产某产品，要对机器进行改造。投入不同数额的资金进行改造有三种方法：购新机器、大修和维护，根据经验，销路好发生的概率为0.6。相关投入额及不同销路情况下的效益值如下表所示，请选择最佳方案。

效益值表 (单位：万元)

供选方案	投资额T_i	销路好p_1=0.6	销路不好p_2=0.4
A_1：购新	12	25	-20
A_2：大修	8	20	-12
A_3：维护	5	15	-8

供选方案	投资额T_i	销路好p_1=0.6	销路不好p_2=0.4
A_1：购新	12	25	-20
A_2：大修	8	20	-12
A_3：维护	5	15	-8

解 ① 根据题意，作出决策树，见下图。

② 计算各方案的效益期望值：$E(A_i) = \sum_j p_j V_{ij} - T_i$

$$E(A_1) = 0.6 \times 25 + 0.4 \times (-20) - 12 = -5$$

$$E(A_2) = 0.6 \times 20 + 0.4 \times (-12) - 8 = -0.8$$

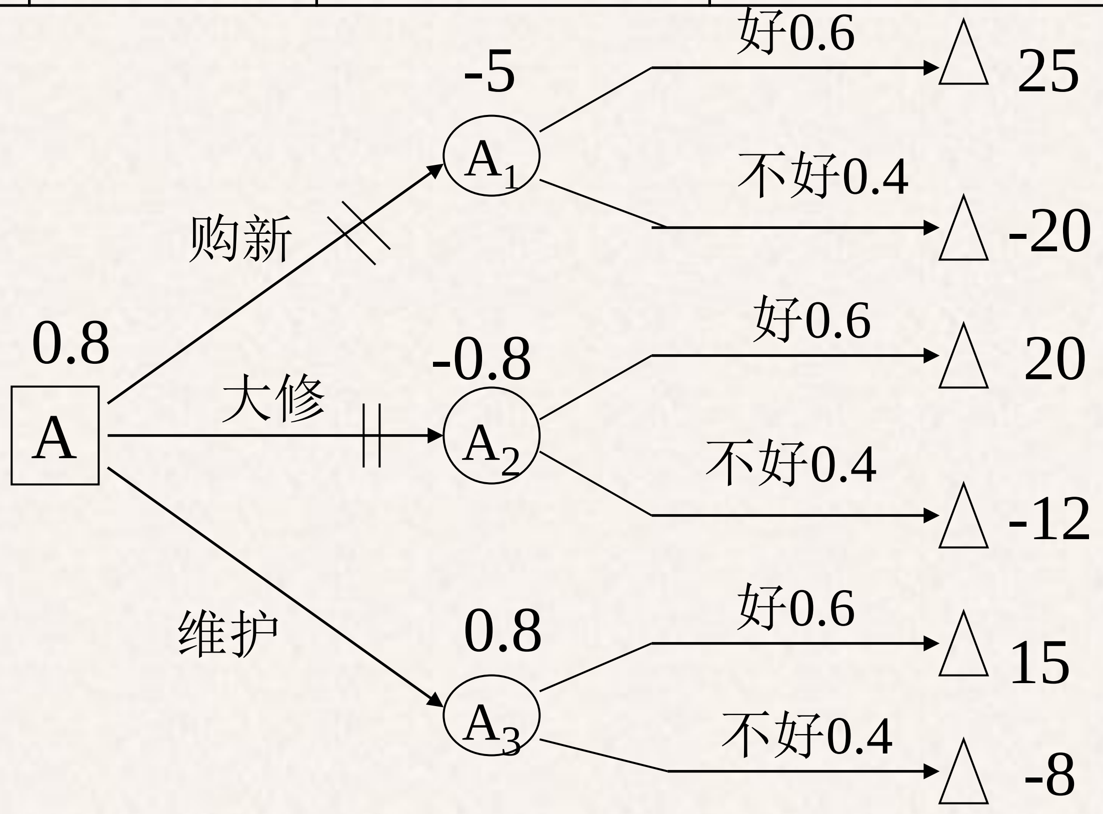
$$E(A_3) = 0.6 \times 15 + 0.4 \times (-8) - 5 = 0.8$$

③ 最大值为 $E(A_3)$

选对应方案A_3，即维护机器，并将A_1，A_2剪枝。

风险型决策方法与操作

供选方案	投资额T_i	销路好p_1=0.6	销路不好p_2=0.4	期望值
A_1：购新	12	25	-20	-5
A_2：大修	8	20	-12	-0.8
A_3：维护	5	15	-8	0.8



多级决策问题

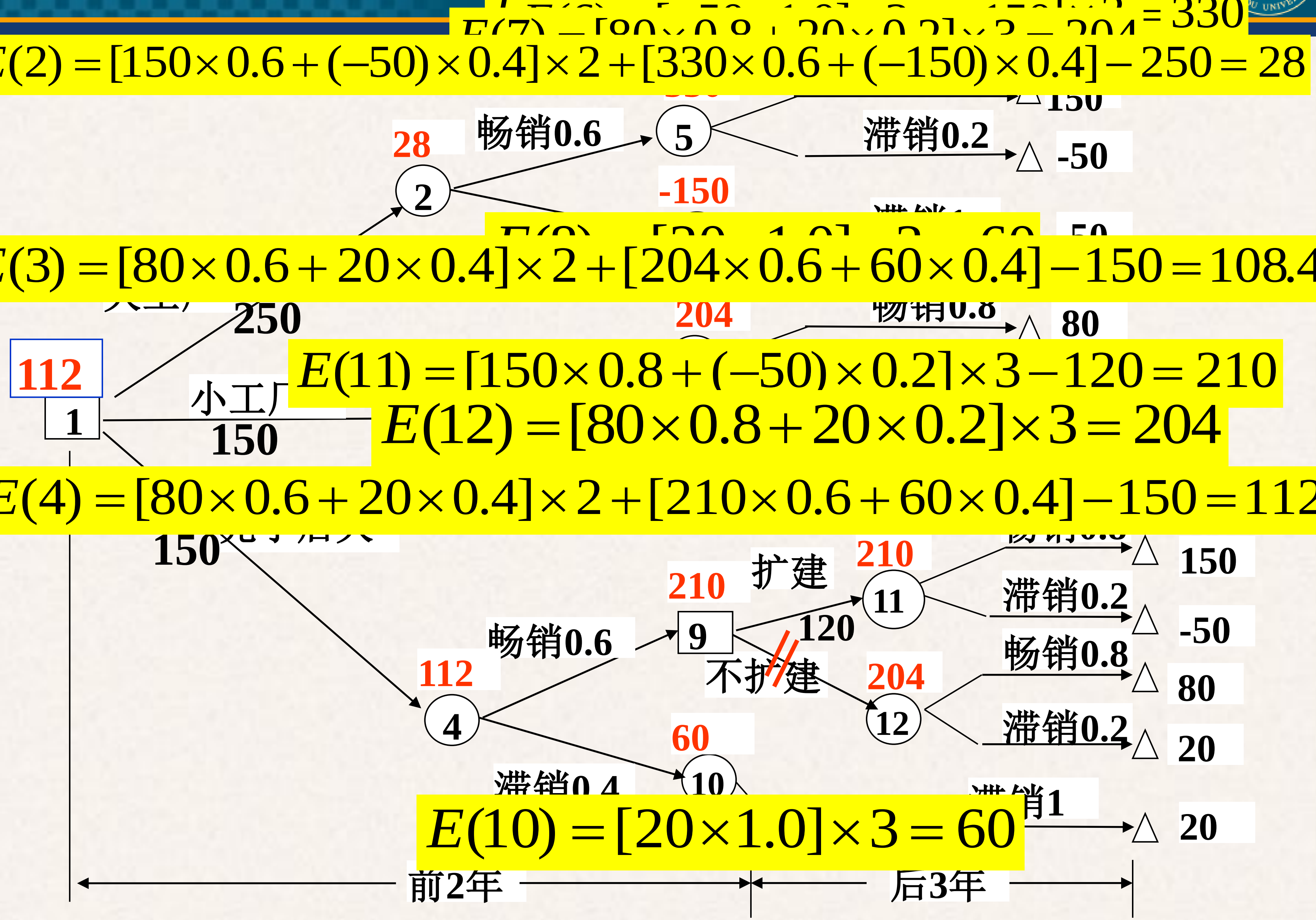
例2.4 某公司由于市场需求增加，使得公司决定要扩大公司规模，供选方案有三种：方案一，新建一个大工厂，需投资250万元；方案二，新建一个小工厂，需投资150万元；方案三，新建一个小工厂，2年后若产品销路好再考虑扩建，扩建需追加120万元，后3年收益与新建大工厂相同。效益值如下表所示，根据预测可知该产品前两年畅销和滞销的概率分别为0.6，0.4。若前2年畅销，则后3年畅销和滞销的概率分别为0.8，0.2；若前2年滞销，则后3年一定滞销。请对方案做出选择。

效益值　　(单位：万元)

自然状态	概率		供选方案与效益			
	前2年	后3年	大工厂	小工厂	先小后大	
					前2年	后3年
畅销	0.6	畅销0.8 滞销0.2	150	80	80	150
滞销	0.4	畅销0 滞销1	-50	20	20	-50
成本			250	150	150	120

解：　(1) 画决策树

风险型决策方法与操作



$$E(2)=[150\times0.6+(-50)\times0.4]\times2+[330\times0.6+(-150)\times0.4]-250=28$$

$$E(3)=[80\times0.6+20\times0.4]\times2+[204\times0.6+60\times0.4]-150=108.4$$

$$E(11)=[150\times0.8+(-50)\times0.2]\times3-120=210$$

$$E(12)=[80\times0.8+20\times0.2]\times3=204$$

$$E(4)=[80\times0.6+20\times0.4]\times2+[210\times0.6+60\times0.4]-150=112$$

$$E(10)=[20\times1.0]\times3=60$$

比较方案，E(4)最大，则取最大值112，对应的方案是先小后大作为选定方案，即先建小厂，后扩建大工厂的方案为最终方案。

问题讨论2

为了适应市场的需要，某地提出了扩大电视机生产的两个方案。一个方案是建设大工厂，第二个方案是建设小工厂。

建设大工厂需要投资600万元，可使用10年。销路好每年赢利200万元，销路不好则亏损40万元。

建设小工厂投资280万元，如销路好，3年后扩建，扩建需要投资400万元，可使用7年，每年赢利190万元。不扩建则每年赢利80万元。如销路不好则每年赢利60万元。

试用决策树法选出合理的决策方案。经过市场调查，市场销路好的概率为0.7，销路不好的概率为0.3。

风险型决策方法与操作

在风险型决策过程中，往往理论与现实存在一定程度的落差。

能获得最高金额收益的期望行动方案不一定是对决策者最有利的方案。

仅以货币的收益期望值作为决策准则不一定是最合理的。

例2.5 有一个投资为200万元的工厂，发生火灾的可能性是0.1%。要不要买保险？

若保险，每年应支付2500元的保险费。一旦发生火灾后，保险公司可以赔偿全部资产。

若不保险，不需支付保费，但发生火灾后，工厂的决策者承担资产损失的责任。

若按货币收益期望值为准则进行决策，结论是不买保险。因为工厂发生火灾的损失的期望值是200万元×0.001=2000元，小于保费。

但是，工厂决策者一般都愿意买保险。

类似效应的各种交通工具保险收益情况对比

	事故概率（十万分之）	最高赔付（万）	保费（元）	收益值（元）	收益率
航空	0.46	50	30	2.3	0.077
火车	0.3	30	3	0.9	0.3
轮船	0.35	20	3	0.7	0.23
汽车	8.1	10	2	8.1	4.5
自行车	2000	3	30	600	20

风险型决策方法与操作

再如：一个有关小偷的决策问题

据资料统计，一个小偷一年可以通过出售赃物获得净收入2.5万元，但一旦被抓住、起诉和定罪后，在监狱中的一年会失去合法收入及经济赔偿共计20万元（一个17岁以上的成年小偷被送进监狱的可能性是0.0024）。

可核算得小偷一年的犯罪成本为:

$$200000 \times 0.0024 = 480(元)。$$

一年的预期收入: 25000-480=24520(元)

(2015年全国最高的最低工资2030×12=24360（深圳））

（2014年8月统计13年应届毕业生平均月薪2443元）http://cq.qq.com/a/20140804/012287.htm ????

风险型决策方法与操作

所反映出的问题

同一种货币值，在不同风险状况下，对于同一个人，其主观价值是不相同的；

在同等程度的风险状况下，不同的人对风险的态度不同，所以反映相同货币的价值也是不相同的。

经济学家和社会学家应用“效用”的概念，去衡量人们对同一笔货币在主观上的价值——货币的效用值。

理论与实际的落差就体现在这个“效用值”上。

甲选择第一种
乙选择第二种
丙选哪都一样

作中做出了贡献。上级机关决定给他

件规定了两种领奖办法：

直接发给某人100元现金；

第二种，采用抽签发奖办法，抽中了，可得奖金300元，抽不中，则得不到奖金（抽中或抽不中的概率各为0.5）。

按第一种办法可以稳得100元奖金。按第二种办法领奖，得奖金的期望值是

$$300 \times 0.5+0 \times 0.5=150\text{元}$$

你愿意按哪种办法领奖?

甲选择第一种
乙选择第二种
丙选哪都一样

风险型决策方法与操作

甲选择第一种
乙选择第二种
丙选哪都一样

← 中奖概率太低，应高于50%
← 中奖概率50%已不低，冒险争取
← 50%中奖概率合适，两者**等效**

对于每个决策者必然存在着一个对应的**等效**概率p_j，使其认为选择第一种领奖稳获100元和选择第二种领奖的期望收益$300\times p_j+0\times(1-p_j)$是等值的。

我们称这个概率p_j为该决策者的**平衡概率**或**效用概率**

引入

效用概率 → **效用值准则**

效用理论

1. 效用的概念

贝努利(D.Berneulli)首次提出效用概念，他用右图1表示人们对钱财的真实价值的考虑与其钱财拥有量之间有对数关系。

效用是一种相对的指标值，它的大小表示决策者对于风险的态度，对某事物的倾向、偏差等主观因素的强弱程度，用于度量决策者对于风险的态度。

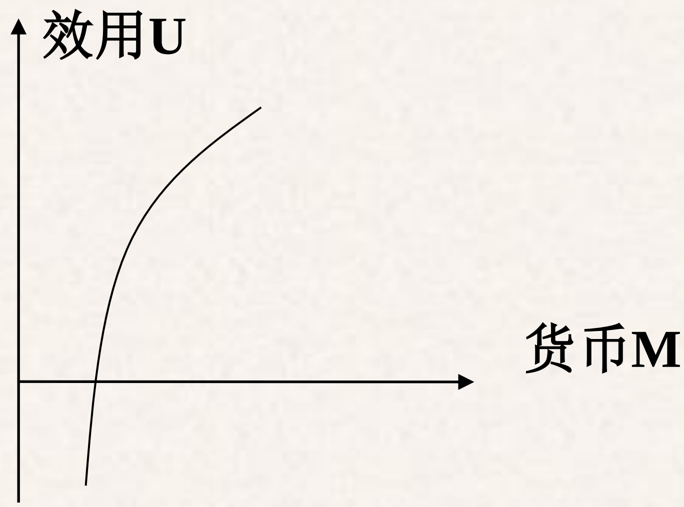


图1 贝努力效用曲线

例2.7

（1）方案A_1：稳获100元；方案B_1：用抛掷硬币的方法，猜对得250元，猜错不得钱。

（2）方案A_2：稳获100元；方案B_2：用抛掷硬币的方法，直到出现正面为止，第n 次出现正面得到2^n元。

大多数选择A_1、A_2。通过计算有

$$E(B_1)>E(A_1),\quad E(B_2)>E(A_2)$$

一般来说效用值在[0,1]之间取值。凡是决策者最看好、最倾向、最愿意的事物（事件）的效用值可取1；反之，效用值取0。当各方案期望值相同时，一般用最大效用值决策准则，选择效用值最大的方案。

风险型决策方法与操作

通过效用指标将某些难于量化、有质的区别的事件给予量化，得到各方案的综合效用值，选择效用值最大的方案作为决策准则。

2. 效用的测定

所谓效用测定，就是按照问题构成的无差异关系，评定使该关系成立时的某一未知量的值，然后由效用方程求出未知的效用值。

例：我们有两个方案A和B，方案A能有0.5的概率获得0元和0.5的概率获得100元，方案B有1的概率获得50元收益，请问你喜欢哪一种方案？

我们用 x 代替0，用 z 代替100，y 代替50，a 表示方案A中获得100元的概率。即可以得到关于 x, y, z 的效用方程：

$$U(y)=(1-a)U(x)+aU(z)$$

称 a 为 y 关于 x 与 z 的无差概率。显然，效用的测定问题，实际上也就是无差概率的评定问题。无差概率的测定实际上是通过内省的心理方式按无差关系 $y\sim[x,a,z]$ 来估计的。

3. 效用函数的构造

(1)先找出效用最低点和最高点，分别记为 x, z，并 $U(x)=0, U(z)=1$，并告诉决策者，以概率$1-p$得到x，以概率 p 得到 z 。然后问决策者，认为什么样的y 和上面的机会是相当的？则 y 的效用函数值为

$$
\begin{aligned}
U(y) &= (1-p)U(x) - pU(z) \\
&= (1-p)\times 0 + p\times 1 = p
\end{aligned}
$$

(2) 再改变 p 的值，就可以得到足够多的点及其效用值。然后把这些点以平滑的曲线连接起来，从而求得效用曲线。

4. 效用曲线与风险态度

从上面效用函数的构造中可以知道，主体在效用测定中可能存在着三中不同的风险态度，即风险厌恶、风险追求和风险中立，根据风险态度可以把决策者分为三种类型：风险规避者、风险偏好者和风险中性者。

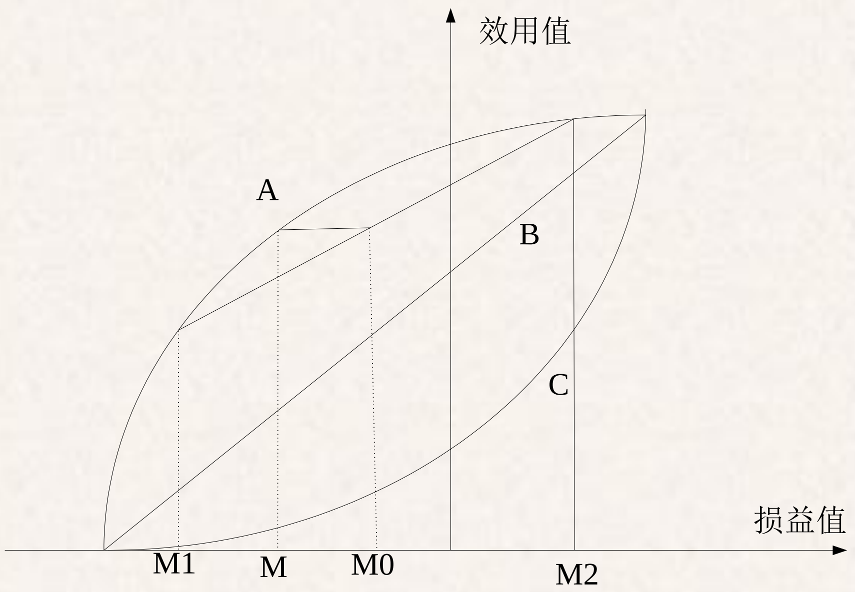


图2 效用曲线示意图

5. 效用理论在决策中的应用

例2.8 某企业开发生产某种产品设备，可采用两个方案：

方案I：引进部分外资，采用部分国外先进设备，谈判成功的可能性为60%。投产后，在经济寿命期内能获利现值500万元。谈判失败的可能性为40%。谈判失败则损失谈判费，可行性研究费和设计费100万元。

方案II：国内自行设计，但还有某种设备未能完全过关，近年内研制成功的概率80%，成功后能在经济寿命内获利现值300万元。研制失败，则损失研制费50万元。

试问应采取何方案。

风险型决策方法与操作

方法1：期望值分析法

方案I期望值：$0.6\times500+0.4\times(-100)=256$(万元)

方案II期望值：$0.8\times300+0.2\times(-50)=230$(万元)

因为260 (万元) > 230 (万元)，所以方案I优，应采用方案I，积极组织引进设备的谈判。

方法2：效用分析法

若决策前事先确定的效用曲线如图3中A曲线，获利现值500万元的效用为1.0；损失100万元的效用为0.2；获利现值300万元的效用为0.88；损失50万元的效用为0.4。

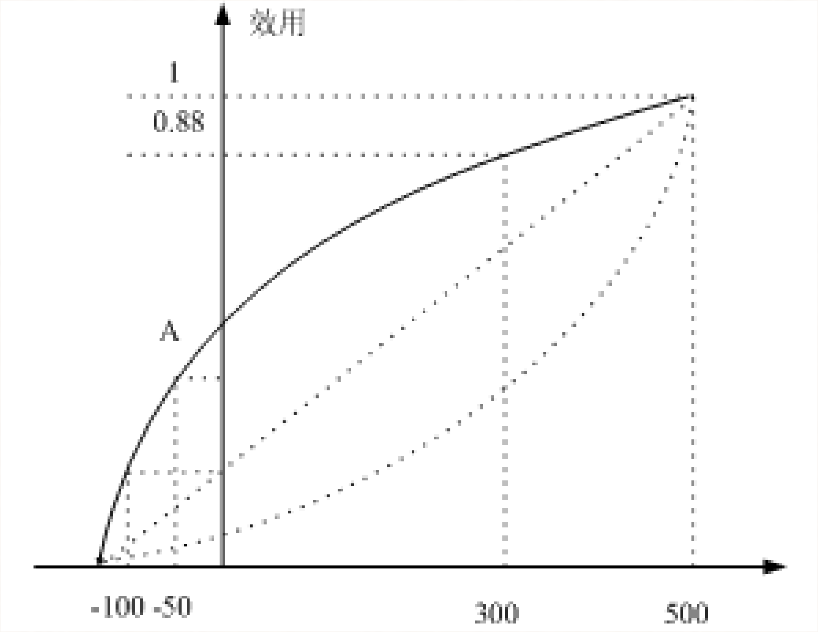


图3 企业产品方案效用曲线图

方案I效用： $0.6\times1+0.4\times0.2=0.68$

方案II效用： $0.8\times0.88+0.2\times0.4=0.784$

应采用方案II，积极组织国内自行设计。

问题讨论3

某石油公司拥有一些土地，在对类似地域的详细考察后，地质专家估计，此新区地下是富矿的可能性为0.2；是贫矿的可能性为0.3；是枯井的可能性为0.5。在进行决策时还要考虑的另一种情况是，如果地下有油矿，其原油又分为“优品”和“次品”两种。“优品”原油比“次品”原油含硫磺成份低，易于处理，加工成本低。据地质专家估计，无论是富矿还是贫矿，原油是优质的可能性为0.6。

该公司可能采取的决策方案有两个，A1：自行开发；A2：无条件出租。根据测算，该公司自行开发和无条件出租的利润回报情况如下表所示：

方案	富矿（0.2）		贫矿（0.3）		枯井（0.5）
	优（0.6）	次（0.4）	优（0.6）	次（0.4）	
A_1	4	3	2	-0.5	-1
A_2	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6

问题讨论3

(1) 试根据先验分布进行决策。

(2) 该公司在进行决策时，为了获得更准确的情报，还可以考虑利用先进的地震探测技术，了解该地区地层的结构情况。这种探测技术可以确定该地区的地层是：H1：封闭结构，H2：半封闭结构，或H3：无结构。根据过去利用这种技术对200个相似地区进行测试与开发的结果，表明地层结构与石油蕴藏量的关系如下表所示。试利用贝叶斯分析方法进行决策。

(3) 如果进行地震探测需要费用300万元，是否进行。

单位：个

地层结构 \ 产油量	富矿	贫矿	枯井
H_1	25	30	30
H_2	15	15	40
H_3	10	5	30

决策类型

<table>
<tr><td>不确定型决策</td><td rowspan="3">方法</td><td rowspan="3">操作</td></tr>
<tr><td>风险型决策</td></tr>
<tr><td>确定型决策</td></tr>
</table>

确定型决策方法与操作

描述的是在一定资源限制下(自然状态)，给出了很多个可以选择的不同方案(行动方案)，从这些方案中确定一个最好方案的决策过程。

解决方法：

- 线性规划模型
- 线性规划延伸
- 动态规划模型
- 存储模型
- 排队模型
- ……

线性规划模型

在实现最优化目标(收益最大或成本最小)的过程中，采用的手段是利用所有资源限制关系和目标表述关系都是关键因素量的一次方关系。

确定型决策方法与操作

例2.9 某工厂在计划期内要安排I、II两种产品的生产。生产单位产品所需的设备台时及A，B两种原材料的消耗以及资源的限制如下表所示。工厂每生产一个单位产品I可获利50元，每生产一个单位产品II可获利100元，问工厂应分别生产多少单位产品I、II才能获利最多？

产　品 资　源	I	II	资源限制
设　备	1	1	300台时
原料A	2	1	400kg
原料B	0	1	250kg

关键因素：产品I和产品II的产量

分别设置未知变量x_1，x_2

用x_1和 x_2以函数形式表示工厂所要求的最大利润的目标（关键因素的关系）：

决策变量

$$\max z = \underbrace{50\, x_1 + 100}_{\text{单位产品I和II的利润}}\, x_2,$$

目标函数

再以x_1和 x_2的不等式关系来表示问题中相应资源的限制条件（关键因素的关系）：

台时数的限制： $x_1 + x_2 \leq 300$

原材料A的限量： $2x_1 + x_2 \leq 400$

原材料B的限量： $x_2 \leq 250$

约束条件

线性规划数学模型的表述形式

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

满足条件：

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 300 \\ 2x_1 + x_2 &\le 400 \\ x_2 &\le 250 \end{aligned}\right\} \text{外在约束}$$

$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \longleftarrow \text{简单约束}$$

该类问题的特殊要求

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$
满足条件： $x_1 + x_2 \le 300$
$2x_1 + x_2 \le 400$
$x_2 \le 250$
$x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$

线性规划数学模型的基本要素：

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

满足条件：

$$x_1 + x_2 \le 300$$
$$2x_1 + x_2 \le 400$$
$$x_2 \le 250$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$$

（1）决策变量：

用符号来表示可控制的因素，如x_i。

（2）目标函数：max z 或 min f，用来计算和实现决策问题的目标。

（3）约束条件：s.t. (subject to) 满足于（一个等式或不等式组），一般是问题的资源限制条件。

线性规划数学模型的特点:

（1）因为实际管理问题的决策量不能为负，所有x_i都是非负的决策变量。

（2）目标函数、约束条件关系符左端的关系式都是决策变量 x_i的一次性（线性）函数。

（3）约束条件关系符右端都是不含x_i的非负常量，称之为常数项。

一般线性规划问题的建模过程：

（1）理解决策问题

（2）确定决策变量

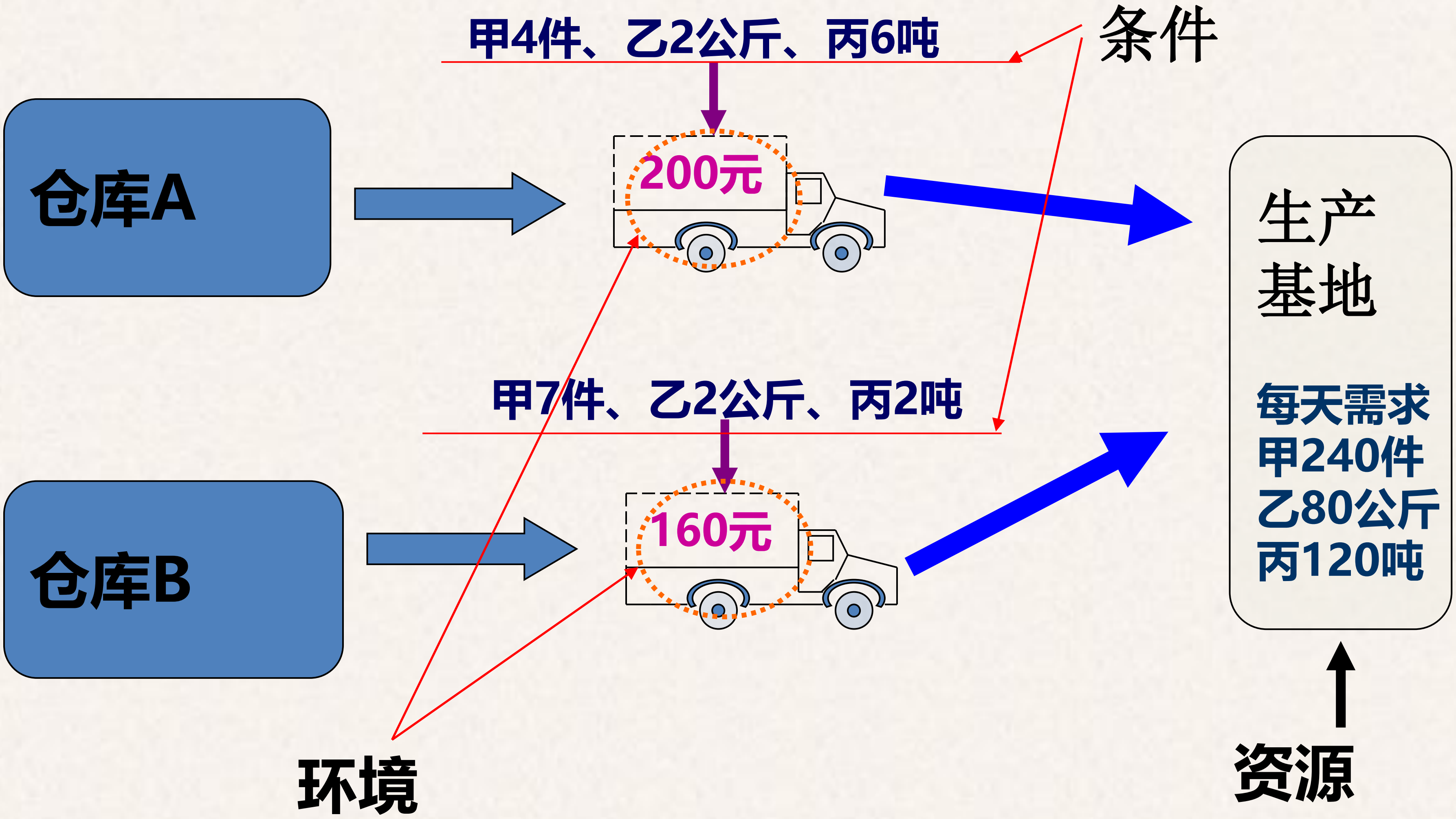
（3）确定目标函数

（4）确定约束条件

（5）得线性规划模型

例2.10 某生产基地每天需从A、B两仓库中提取原材料用于生产，需要提取的原材料有：原材料甲不少于240件，原材料乙不少于80公斤，原材料丙不少于120吨。已知每辆车从A仓库能运回甲4件、乙2公斤、丙6吨，运费为每车200元；从B仓库每辆车能运回甲7件、乙2公斤、丙2吨，运费为每车160元。为满足生产的需要，基地每天应发往A、B两仓库各多少辆车，使总的运费为最低。

确定型决策方法与操作


甲4件、乙2公斤、丙6吨
条件
仓库A
200元
生产
基地
甲7件、乙2公斤、丙2吨
每天需求
甲240件
乙80公斤
丙120吨
仓库B
160元
环境
资源

将上述问题的描述整理成表格：

	原料甲(件)	原料乙(公斤)	原料丙(吨)	运费(元)
仓库A（/车）	4	2	6	200
仓库B（/车）	7	2	2	160
最少需求量	240	80	120	

一、确定决策变量

分别设 x_1、x_2为该基地每天发往A、B两仓库的货车数量

	原料甲(件)	原料乙(公斤)	原料丙(吨)	车量	运费(元)
仓库A（/车）	4	2	6	x_1	200
仓库B（/车）	7	2	2	x_2	160
最少需求量	240	80	120		

二、确定目标函数

本问题的目标是使每天总的运费为最低。而每天的运费为：

$$f=200\,x_1+160\,x_2$$

所以本决策问题的目标函数为：

$$\min f=200\,x_1+160\,x_2$$

三、确定约束条件

原料甲 $4x_1+7x_2 \geq 240$

原料乙 $2x_1+2x_2 \geq 80$

原料丙 $6x_1+2x_2 \geq 120$

外在约束

车辆数不能为负 x_1、$x_2 \geq 0$

简单约束

得线性规划数学模型：

$$\min f = 200x_1 + 160x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 4x_1 + 7x_2 &\geq 240 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 80 \\ 6x_1 + 2x_2 &\geq 120 \\ x_1、x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

线性规划数学模型的一般形式

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq\ (=,\geq)\ b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leq\ (=,\geq)\ b_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq\ (=,\geq)\ b_m$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$的简单约束

线性规划数学模型的标准形式

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

线性规划数学模型的标准形式特点：

（1） 目标函数求最大值（有时求最小值）；

（2） 约束条件都为等式方程，且右端常数项b_i都大于或等于零；

（3） 决策变量x_i为非负。

一般形式如何转化为标准形式

(1) 目标函数的转换

如果是求极小值即 $\min z = \sum c_j x_j$，则可将目标函数乘以 (-1)，可化为求极大值问题。

即 $\max z' = -z = -\sum c_j x_j$

也就是：令 $z' = -z$，可得到上式。

(2) 变量的变换

若存在取值无约束的变量 x_j，可令 $x_j = x_j' - x_j''$

其中：$x_j', x_j'' \geq 0$

（3）约束方程的转换：由不等式转换为等式

$$\sum a_{ij}x_j \le b_i \quad \longrightarrow \quad \sum a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0$$ 称为松弛变量

$$\sum a_{ij}x_j \ge b_i \quad \longrightarrow \quad \sum a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$$

$$x_{n+i} \ge 0$$ 称为剩余变量

（4）常量 $b_i < 0$ 的变换：约束方程两边乘以（-1）

课堂练习3

将下列线性规划模型转化为标准形式：

$$\min z = -2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 5x_1 + x_2 + x_3 \le 7$$

$$x_1 - x_2 - 4x_3 \ge 2$$

$$-3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5$$

x_1，$x_2 \ge 0$，x_3无约束

课堂练习4

某工厂要生产两种新产品：门和窗。经测算，每生产一扇门需要在车间I加工1小时、在车间III加工3小时；每生产一扇窗需要在车间II和车间III各加工2小时。而车间I每周可用于生产这两种新产品的时间为4小时、车间II为12小时、车间III为18小时。每扇门的利润为300元，每扇窗的利润为500元。而且根据市场调查得到的这两种新产品的市场需求状况可以确定，按当前的定价可确保所有新产品都能销售出去。请构建线性规划数学模型，使该厂获得的利润最大。

线性规划数学模型的求解方法

用于解释基本概念

两个变量（二维）线性规划问题的图解法

多个变量（高维）线性规划问题的单纯形法

计算机软件求解

仅作为工具用来求解数学模型

线性规划模型图解法

确定型决策方法与操作

特征： 只包含两个决策变量的线性规划问题

优点： 简单、直观地显现线性规划问题的基本概念

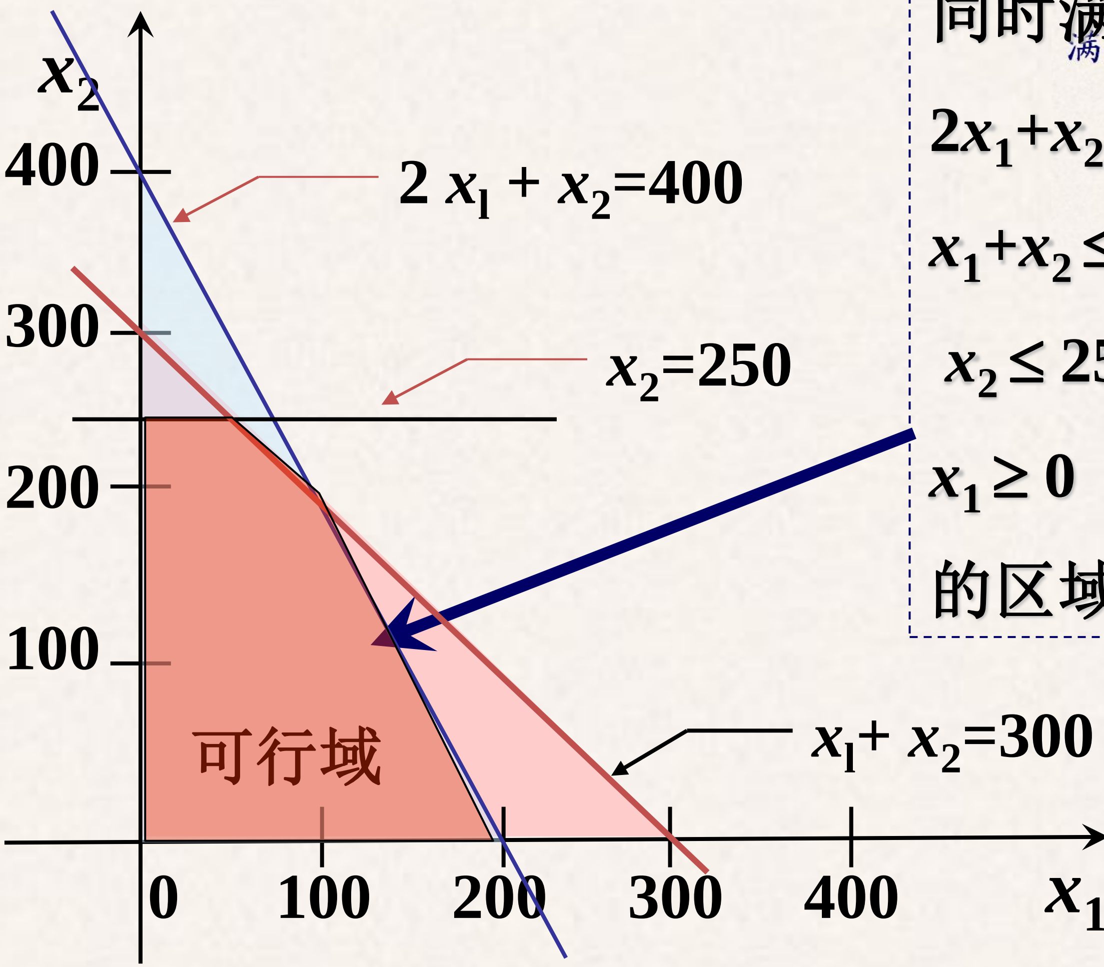
方法： 在以x_1，x_2为坐标轴的直角坐标系里，图上任意一点的坐标代表了决策变量 x_1，x_2的一组值，也就代表了一个具体的决策方案。

例2.9 的模型求解

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

满足条件：
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 300 \\
2x_1 + x_2 &\le 400 \\
x_2 &\le 250 \\
x_1 \ge 0,\quad x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

例2.9



同时满足:

$2x_1 + x_2 \leq 400$

$x_1 + x_2 \leq 300$

$x_2 \leq 250$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

的区域——可行域

$\max z = 50x_1 + 100x_2$

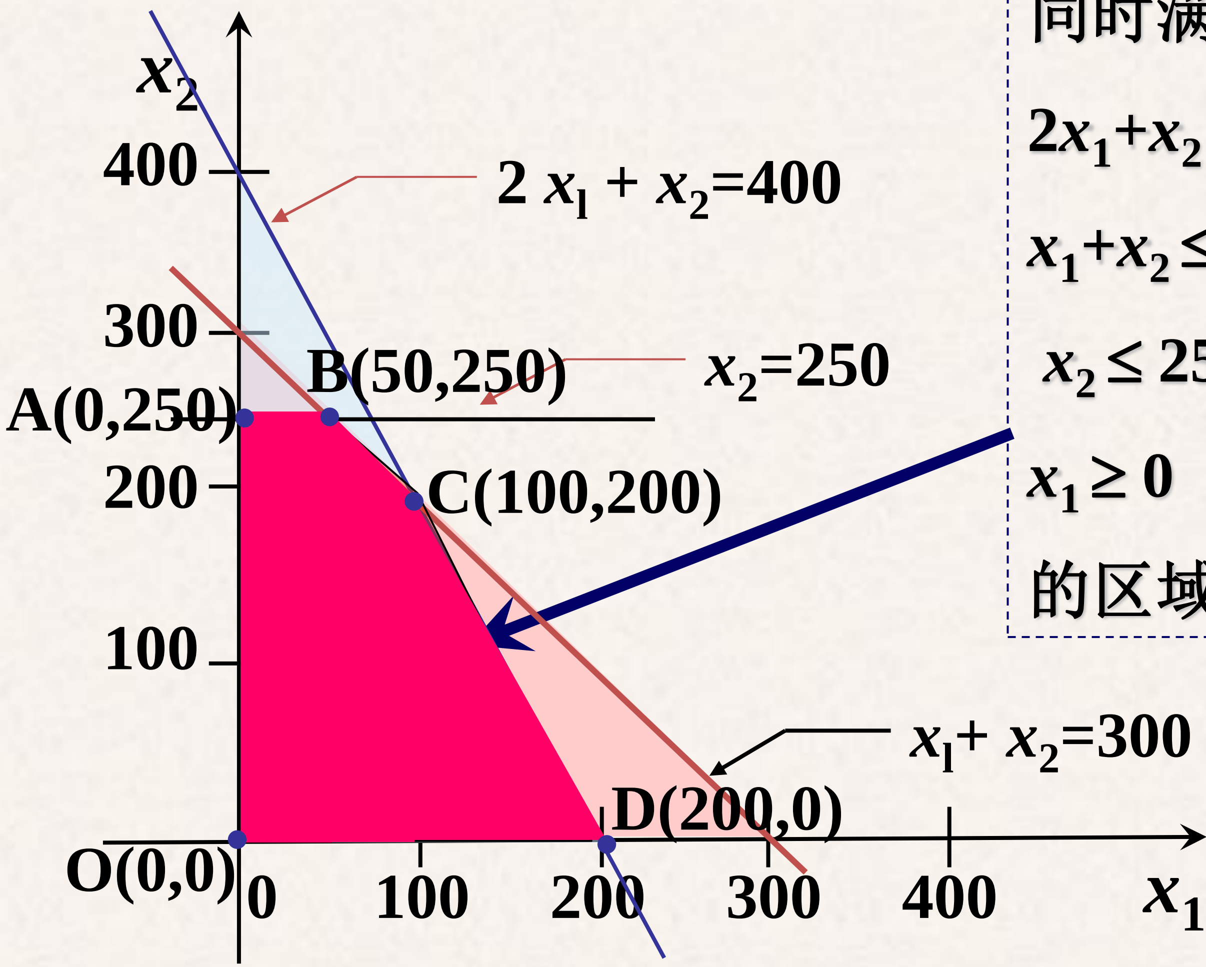
满足条件: $x_1 + x_2 \leq 300$

$2x_1 + x_2 \leq 400$

$x_2 \leq 250$

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

例2.9



同时满足：

$2x_1+x_2 \leq 400$

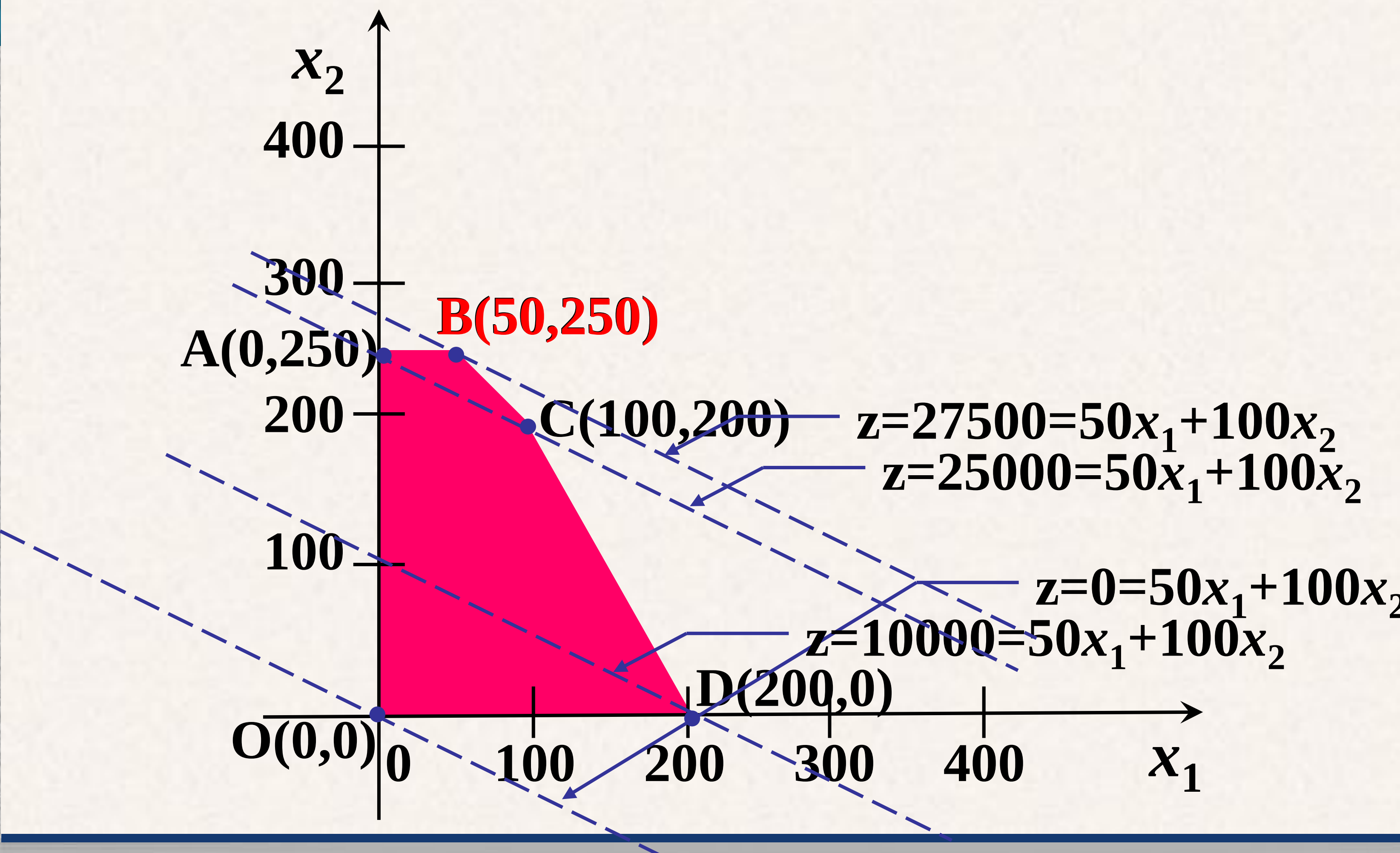
$x_1+x_2 \leq 300$

$x_2 \leq 250$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

的区域——可行域

例2.9



x_2
400
300
200
100
A(0,250)
B(50,250)
C(100,200)
D(200,0)
O(0,0)
0
100
200
300
400
x_1
z=27500=50x_1+100x_2
z=25000=50x_1+100x_2
z=0=50x_1+100x_2
z=10000=50x_1+100x_2

例2.9

最优解：B（50，250）

也就是最佳决策结果为：

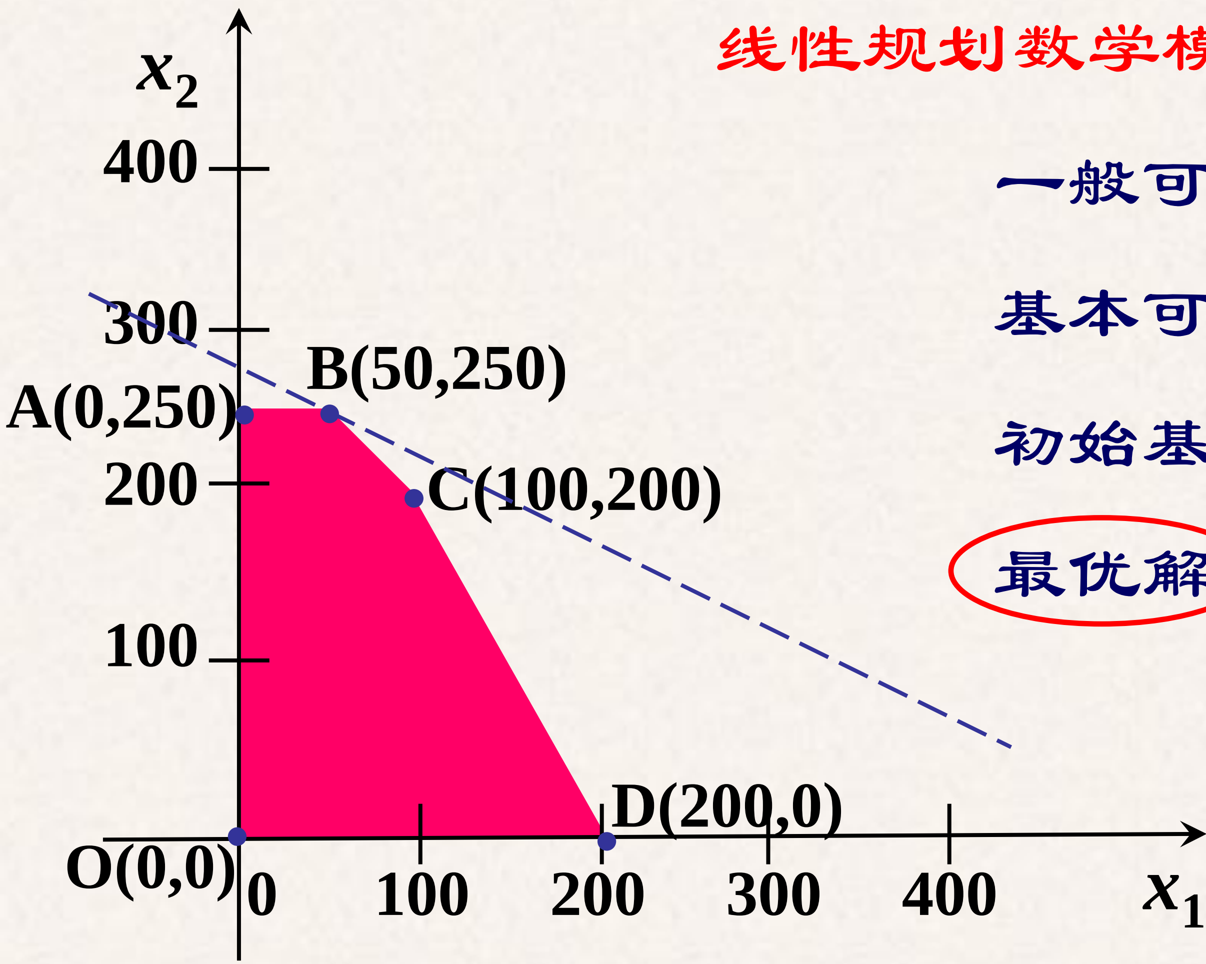
$x_1=50$，$x_2=250$，　此时，$z=27500$。

即最优生产方案：

产品I生产50单位，产品II生产250单位，

此时，可得最大利润27500元。

例2.9



线性规划数学模型的可能解

一般可行解

基本可行解

初始基本可行解

最优解

用图解法求解

$$\max \ z=3x_1+x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 3x_1+5x_2\le 15$$
$$6x_1+2x_2\le 12$$
$$x_1,\ x_2\ge 0$$

$$\max \ z=2x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -x_1+x_2\le 1$$
$$-0.5x_1+x_2\le 2$$
$$x_1,\ x_2\ge 0$$

$$\max \ z=2x_1+2x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1+x_2\le 6$$
$$x_1+x_2\ge 3.5$$
$$x_1\ge 4$$
$$x_1,\ x_2\ge 0$$

有何发现？

线性规划模型图解法

最优解（最优方案）	唯一最优解	←	最需关注
	多个最优解	←	还需研究
	无界解	←	×
	无解	←	后续解决

最优值（方案效果）　目标函数值

课堂练习5

某公司欲制造的产品I和产品II的利润分别为500元/个和400元/个。生产这两种产品都需要四道工序（分别在四个车间内完成）。公司各个车间的加工能力和制造单位产品所需的加工工时如下表：

车间	产品I	产品II	车间每天可用加工工时
1	2	0	300
2	0	3	540
3	2	2	440
4	1.2	1.5	300

1. 建立线性规划数学模型，用以制定该厂获得利润最大的生产计划；

2. 用图解法求解数学模型。

线性规划模型计算机求解

1. 多于200个变量的线性规划数学模型，有大型的求解软件；

2. 小于100个变量的线性规划数学模型，有很多小型的专用软件，并且有很多随教科书发行软件；

3. 目前比较灵活的是用Excel求解功能；

4. 本课程在Excel求解功能的基础上，编写了求解模板和求解程序。可以求解不多于200个变量和不多于200个约束条件的模型。

确定型决策方法与操作

线性规划模型计算机求解

程序操作

例2.9

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　⊙ 最大化 ○ 最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解		最优值
50	250	27500

最优值(最优决策效果):计划期内可获得最多利润27500元

最优解(最优方案):产品I生产50件，产品II生产250件

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

线性规划模型计算机求解

程序操作

例2.10

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2
	200	160

约束条件系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	4	7	250	>	240
2	2	2	80	>	80
3	6	2	120	>	120

最优解		最优值
10	30	6800

最优值(最优决策效果):满足需求的前提下每天所花费的最低费用6800元

最优解(最优方案):仓库A运10车，仓库B运30车

最优方案　　目标函数变量系数

变量	最优解	相差值	下限值	当前值	上限值
X1	10	0	160	200	480
X2	30	0	66.6667	160	200

约束条件　　常数项

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	下限值	当前值	上限值
1	250	10	0	-1E+30	240	250
2	80	0	-70	77.6471	80	120
3	120	0	-10	80	120	133.333

线性规划模型计算机求解

多变量线性规划模型的求解

例2.11

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 4　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返

目标函数系数

x1	x2	x3	x4
2	1	-1	1

约束条件系数

					约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	-1	2	1	7	>	2
2	1	-3	1	-1	4	<	4
3		2	1	2	3	<	3

最优解

8.5	1.5	0	0

最优值: 18.5

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	8.5	0	0	2	1E+30
X2	1.5	0	-3	1	1E+30
X3	0	6.5	-1E+30	-1	5.5
X4	0	4	-1E+30	1	5

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	7	5	0	-1E+30	2	7
2	4	0	2	-1	4	1E+30
3	3	0	3.5	0	3	1E+30

$+x_4$

≥ 2

≤ 4

≤ 3

≥ 0

线性规划模型计算机求解

多变量线性规划模型的求解

例2.12

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 3　约束条件个数: 3　○ 最大化 ⊙ 最小化　求 解　返

x3

目标函数系数

	x1	x2	x3			
	16	16	17			

约束条件系数

	x1	x2	x3	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1		1	9.18919	<	30
2	0.5	-1	6	15	>	15
3	3	4	-1	20	>	20

最优解: 7.2973 | 0 | 1.89189　　最优值: 148.919

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	7.2973	0	1.41667	16	16.5652
X2	0	0.7027	15.2973	16	1E+30
X3	1.89189	0	14.4	17	192

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	9.18919	20.8108	0	9.18919	30	1E+30
2	15	0	-3.6216	3.33333	15	111.25
3	20	3.6E-15	-4.7297	-2.5	20	90

问题讨论4

分析例2.9 的求解结果，用最短板理论（木桶理论）分析哪些约束条件起到了约束作用？

约束：

$$x_1 + x_2 \le 300$$

$$2x_1 + x_2 \le 400$$

$$x_2 \le 250$$

结果：

$$x_1 = 50$$

$$x_2 = 250$$

木桶理论----瓶颈

本章小结

重点内容：

1. 不确定型决策的五种准则
2. 风险型决策中的三种方法
3. 线性规划模型的建模过程
4. 线性规划模型的图解法

THE END，　Thanks！