兰州大学 管理学院
School of Management ,Lanzhou University

第三讲 LP灵敏度分析

宗胜亮

zongshl@lzu.edu.cn

Data
Models & Decisions

课程知识结构导航

纵横运筹学

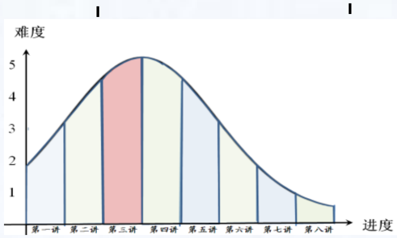
理论分析

数据、模型、决策

不确定型决策

风险型决策

确定型决策



运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之一百法则
相差值分析

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输问题模型
目标规划模型
网络优化模型

生产安排问题
排班问题
套裁下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运问题模型

有优先级目标规划
加权目标规划

最短路模型
最小费用流模型
最大流模型
最小支撑树模型

问题讨论4

分析例2.9 的求解结果，用最短板理论(木桶理论)分析哪些约束条件起到了约束作用？

约束：

$$x_1 + x_2 \le 300$$

$$2x_1 + x_2 \le 400$$

$$x_2 \le 250$$

结果：

$$x_1 = 50$$

$$x_2 = 250$$

木桶理论----瓶颈

问题3.1: 价格变化对决策的影响

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 300 \\ 2x_1 + x_2 \le 400 \\ x_2 \le 250 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 = 50$

$x_2 = 250$

$\max z = 27500$

在例2.9的决策问题中，已用数学模型获得了最优的生产方案，并且还分析了决策问题的资源瓶颈。现在再简单分析一个重要问题：

由于市场上产品的价格随时在发生变化，会导致两个产品的单位利润也在随时变化，这种变化对原决策结果（生产方案）是否有影响？

问题分析

初步分析结论：

1、利润的变化存在着使生产方案改变的倾向，但并不是利润稍有变化，方案就要改变，而是有一个量变到质变的过程。那么决策者找到这个量变的边界将会很有意义。

2、展示了资源配置的合理性，并且从中还可以明确影响生产和经营的资源瓶颈。

3、还有很多类似的有助于优化决策的量化因素。

线性规划模型计算机求解

例2.9

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2			
	50	100	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解

x1	x2
50	250

最优值: 27500

最优方案

变量	最优解	相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

一、最优解与实际值

实际值

实际值是最优解代入约束条件左端后所得的具体值

线性规划模型计算机求解

例2.9

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2
	50	100

约束条件系数

			约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解

50	250

最优值

27500

最优解代入约束条件左端后所得的具体值

$300=1\times50+1\times250$

$350=2\times50+1\times250$

$250=0\times50+1\times250$

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

二、松弛量和剩余量

松弛量和剩余量

在线性规划模型中，“$\leq$”约束条件中没使用的资源或能力被称之为该约束条件的松弛量。

即： 松弛量=常数项-实际值

松弛量和剩余量

线性规划模型计算机求解

例2.9

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　　约束条件个数: 3　　最大化　最小化　　求 解　　返 回

目标函数系数

x1	x2
50	100

约束条件系数

			约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解

50	250

最优值

27500

松弛量=常数项-实际值

0 = 300 - 300
50 = 400 - 350
0 = 250 - 250

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

松弛量和剩余量

线性规划模型中，剩余量是在“≥”约束条件中超过资源或能力最低限量的部分。

即：剩余量= 实际值-常数项

线性规划模型计算机求解

例2.10

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2			
	200	160			

约束条件系数			约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	4	7	250	>	240
2	2	2	80	>	80
3	6	2	120	>	120

最优解		最优值
10	30	6800

剩余量=实际值-常数项

10	=	250	-	240
0	=	80	-	80
0	=	120	-	120

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	10	0	160	200	480
X2	30	0	66.6667	160	200

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	250	10	0	-1E+30	240	250
2	80	0	-70	77.6471	80	120
3	120	0	-10	80	120	133.333

松弛量和剩余量

在线性规划模型中，“≤”约束条件中没使用的资源或能力被称之为该约束条件的松弛量。

即：松弛量=常数项-实际值

线性规划模型中，剩余量是在“≥”约束条件中超过资源或能力最低限量的部分。

即：剩余量= 实际值-常数项

松弛量和剩余量

松弛量和剩余量表征了资源的利用情况

可以通过松弛量和剩余量掌握资源瓶颈

三、价值系数变化影响

价值系数变化影响

目标函数中变量系数c_j的取值范围分析

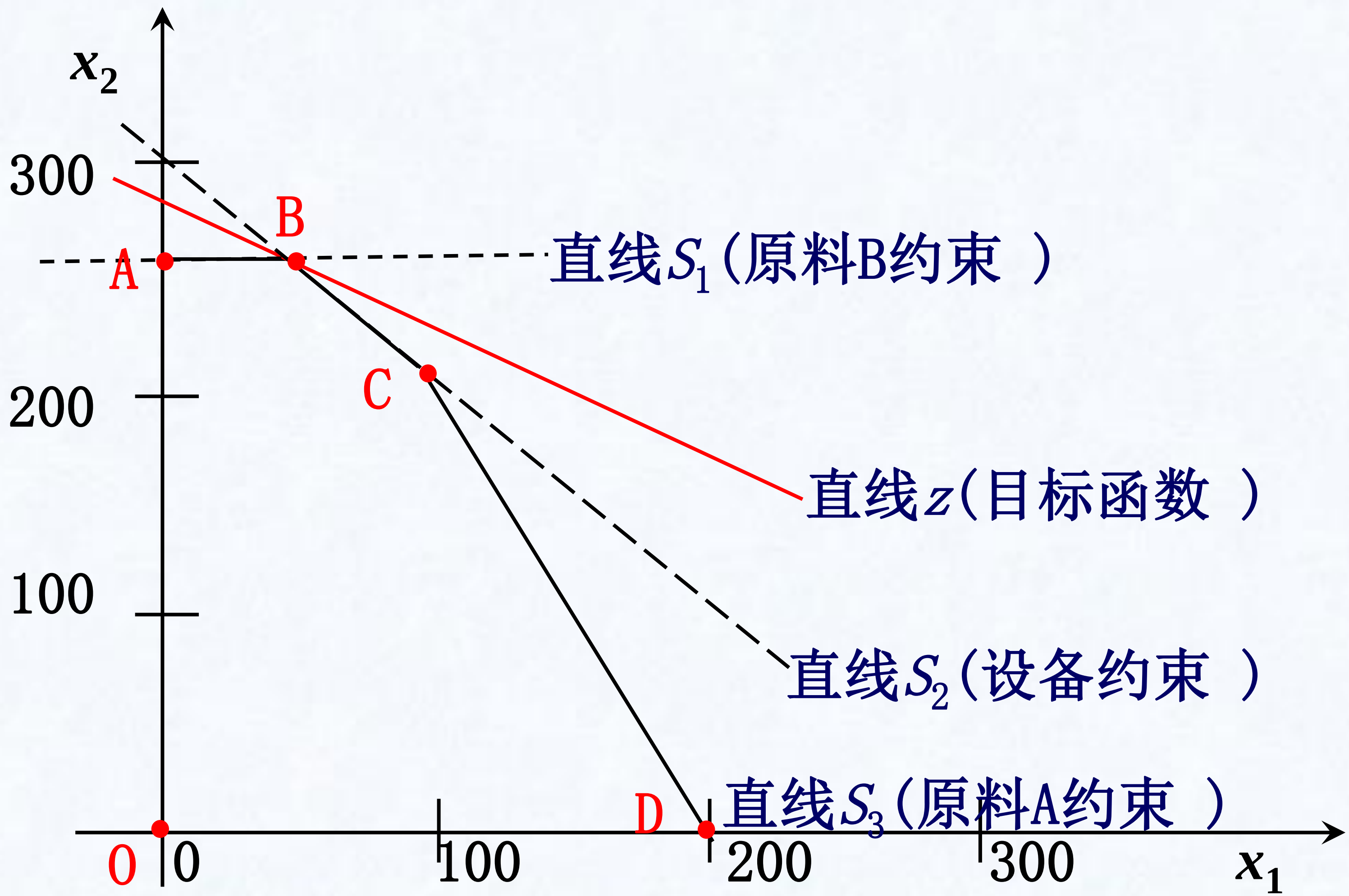
c_j代表广义的产品价值，称之为价值系数，价值或价格是经营的环境。

c_j的灵敏度分析是研究经营环境的变化对最优解(最优方案)的影响。

c_j的改变是最优解由不变到突然变化的过程，其灵敏度分析是研究最优解不发生质变的c_j的变化范围。

价值系数变化影响

例2.9



价值系数变化影响

例2.9

当 $-1\leq -\dfrac{c_1}{c_2}\leq 0$ 时，B仍然是其最优解。

假设单位产品II的利润为100元不变，即$c_2=100$，则有

$$-1\leq -\frac{c_1}{100}\leq 0 \Rightarrow 0\leq c_1\leq 100$$

假设单位产品I的利润为50元不变，即$c_1=50$，得到：

$$-1\leq -\frac{50}{c_2}\leq 0 \Rightarrow 50\leq c_2\leq +\infty$$

价值系数变化影响

例2.9

如此得到以下结论：

	最低限	当前值	最高限
C_1	0	50	100
C_2	50	100	不限

即当产品I的利润为50（元/单位）不变，而产品II的利润只要大于等于50（元/单位）时；或产品II的利润100（元/单位）不变，而产品I的利润在100（元/单位）以下，原最优方案不变。

价值系数变化影响

例2.9

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数：2　约束条件个数：3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

x1	x2
50	100

约束条件系数

			约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解		最优值
50	250	27500

	最低限	当前值	最高限
C_1	0	50	100
C_2	50	100	不限

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

问题讨论1

在例2.9中，若产品I的利润由原来的50元/件增加到55元/件，原最优方案将怎么变化？若增加到105元/件或减少到40元/件又如何？

同理，产品II的利润由100元/件减少到40元/件，原最优方案如何变化？增加到200元/件又如何？

四、对偶价格

对偶价格

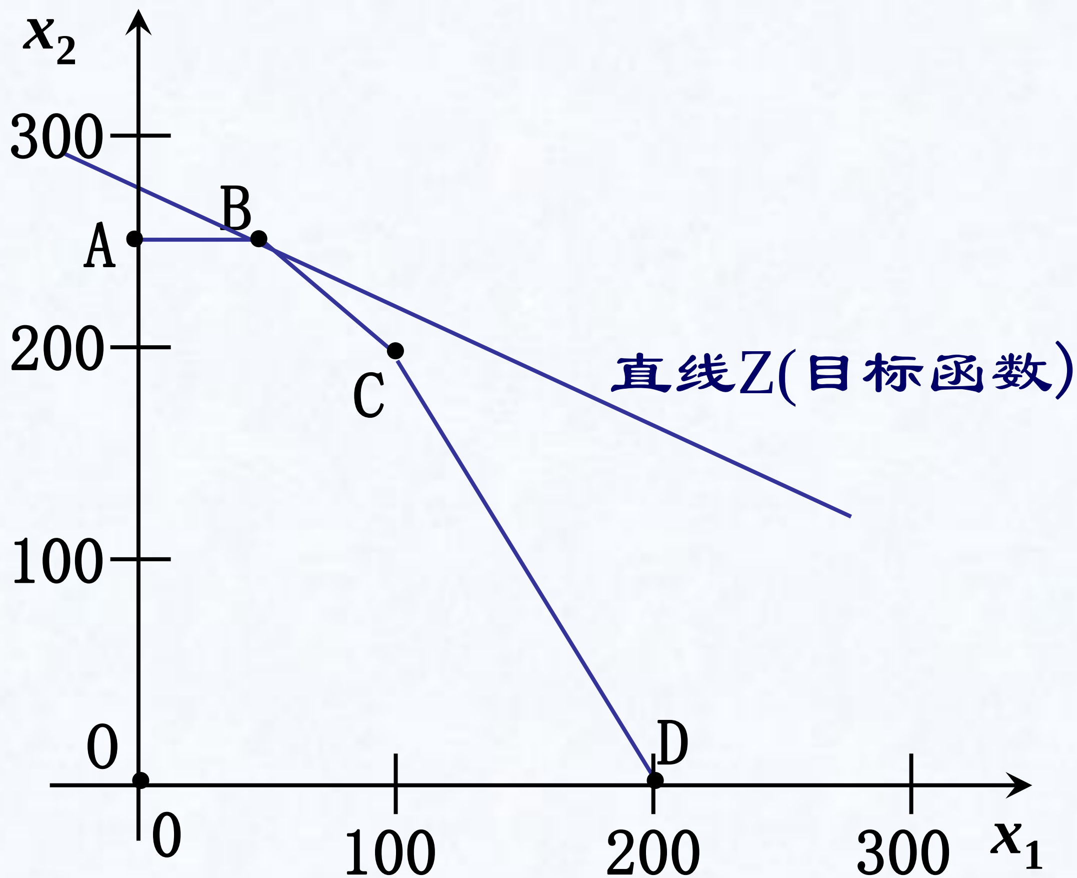
在约束条件中，常数项每增加一个单位而使最优目标函数值得到改进的数量称之为这个约束条件的对偶价格。

有啥用？ ⟶ 表征了资源的价值

怎么得到？ ⟶ 按定义计算

对偶价格的计算

例2.9



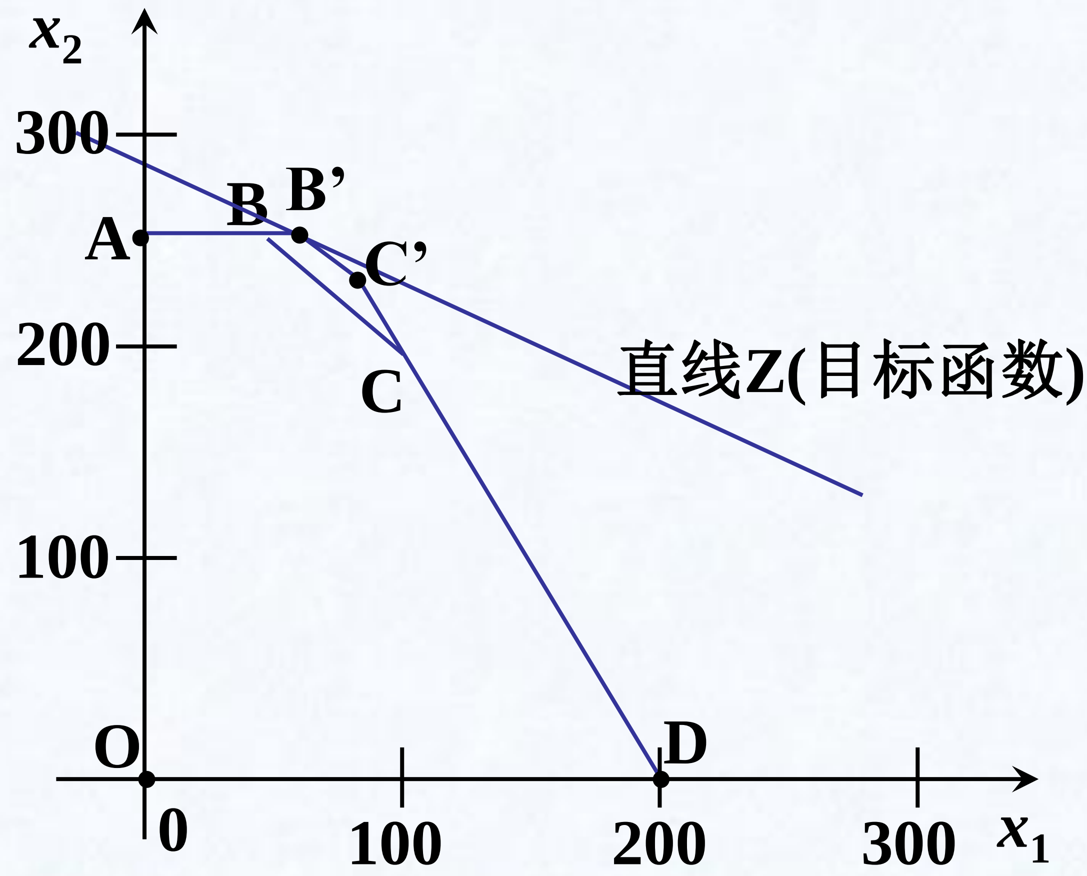
原问题中的可行域是OABCD，最优解是B（50，250），最优值是27500。

对偶价格的计算

假设例2.9 中的设备台时数增加到301个台时，则例3.1中的设备台时数的约束条件变为：

$$x_1+x_2\leq 301$$

例2.9



对偶价格的计算

例2.9

B’点的坐标为x_1= 51, x_2=250，获得的最大利润为27550（元）。

$D_1=50$

即每增加一个设备台时会使企业多获利

27550-27500=50

或每减少一个设备台时会使企业少获利

27500-27450=50

即：$D_1=50$

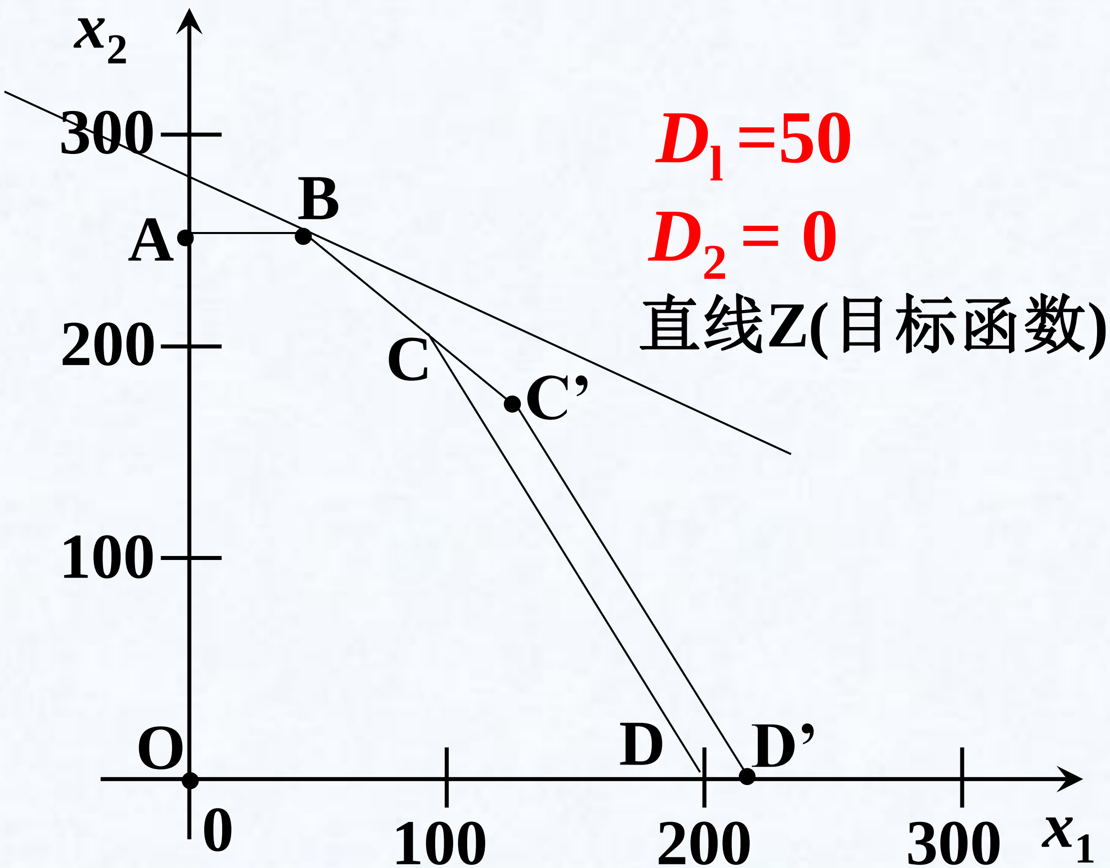
例2.9

若原料A增加1 kg

由约束条件为：

$2x_1+x_2\leq 401$

最优解仍为B点，对偶价格是0



即：$D_2=0$

对偶价格的计算

例2.9

若原料B增加1 kg

由约束条件为：

$x_2 \leq 251$

$D_1 = 50$

$D_2 = 0$

$D_3 = 50$

B点坐标为(49，251)，目标函数为27550

对偶价格为：27550-27500=50

即：$D_3 = 50$

对偶价格的计算

例2.9

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　◉ 最大化 ○ 最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解		最优值
50	250	27500

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

$D_1 = 50$

$D_2 = 0$

$D_3 = 50$

问题讨论2

根据定义分析，无论最大化目标或最小化目标的问题中，对偶价格都可为正也可为负，那么决策问题的对偶价格为负时，它体现了什么决策意义(如最大化目标的变化或最小化目标的变化)？

对偶价格的变化特征

对偶价格值	求最大化问题		求最小化问题	
	b_i	z	b_i	z
$D_i>0$（松/剩=0）	↑	↑(增大而改进)	↑	↓(减小而改进)
	↓	↓(减小而变坏)	↓	↑(增大而变坏)
$D_i=0$（松/剩≠0）	↑	无变化	↑	无变化
	↓	无变化	↓	无变化
$D_i<0$（松/剩=0）	↑	↓(减小而变坏)	↑	↑(增大而变坏)
	↓	↑(增大而改进)	↓	↓(减小而改进)

对偶价格的应用价值

1、资源的价值体现

对偶价格高于该资源的市场价值，表明该资源在本组织有获利能力。就应该购入该资源；

对偶价格等于该资源的市场价值，表明该资源在本组织无获利能力；

对偶价格低于该资源的市场价值，表明该资源在本组织处于负利状态。在整体利益得到保障的前提下，就可以卖掉该资源。否则用该资源生产的产品越多，企业亏损得越多。

对偶价格的应用价值

2、定量地确定了资源瓶颈

用数字确定了企业经营活动中的资源瓶颈（处于木桶中的最短板），并且也定量地反映了资源在企业内部的紧缺程度。

对偶价格的应用价值

3、客观地反映了资源的机会成本

可更准确地了解各种资源在企业的真实价值（客观地核算成本，体现在与会计核算的不同，会计核算时是按“行规”进行分摊，有人为因素）。

课堂练习1

用**图解法**求解下列线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ & f=32x_1+3x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1+x_2 \le 10 \\
& 2x_1+x_2 \ge 4 \\
& x_1+3x_2 \le 24 \\
& 2x_1+x_2 \le 36 \\
& x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

并求四个约束条件的松驰量/剩余量和对偶价格。

五、常数项变化影响

常数项变化影响

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

常数项b_i代表的是提供给企业经营的资源限制量。

b_i的灵敏度分析是研究资源的变化对最优决策的影响。

更重要的是b_i的改变还极有可能导致对偶价格的改变

资源价值

常数项变化影响

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

与最优解相关约束条件的常数项改变

最优解和最优值改变

一定范围内
(仅可行域形状改变)
对偶价格不变

常数项改变超范围

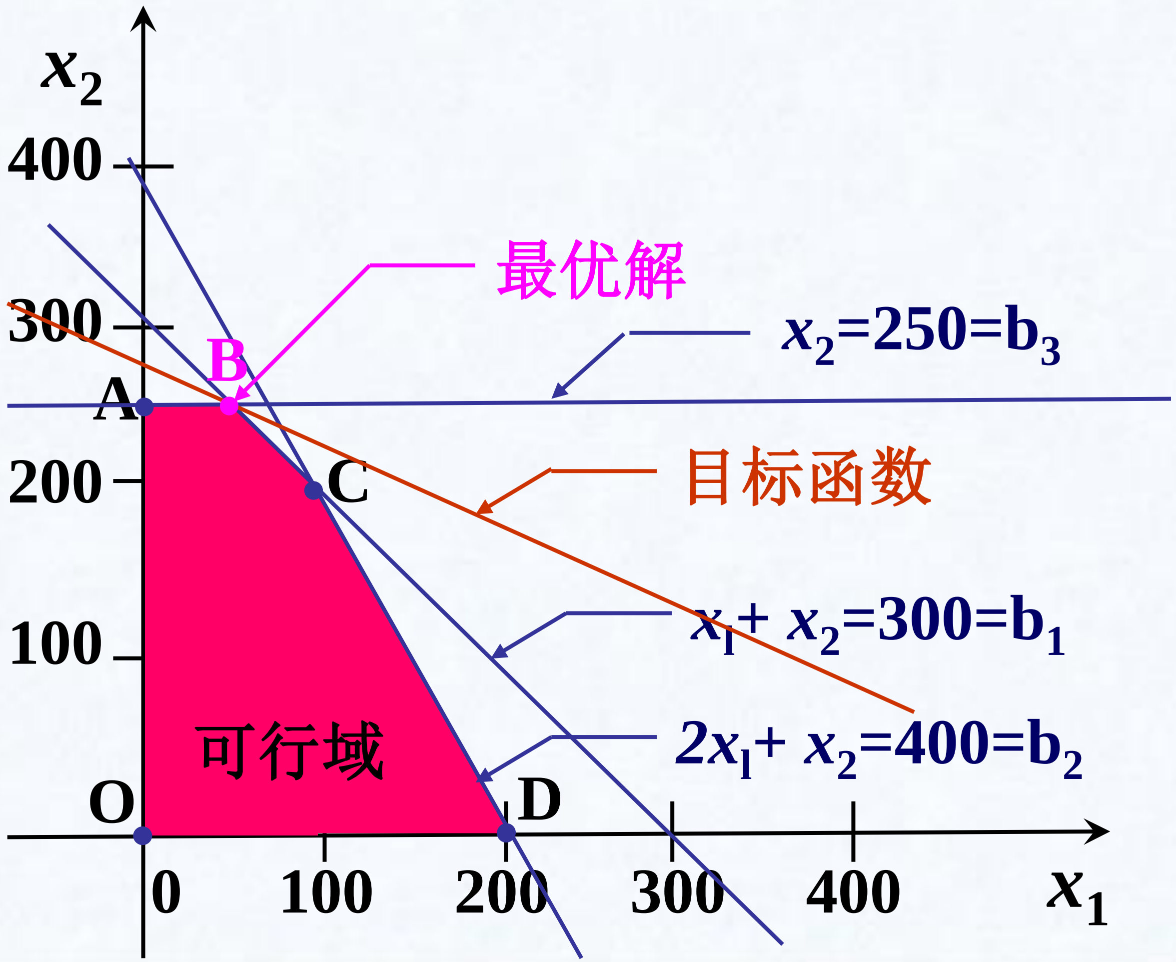
达到阀值
（可行域结构改变）

对偶价格改变

关注这个关键的范围值

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

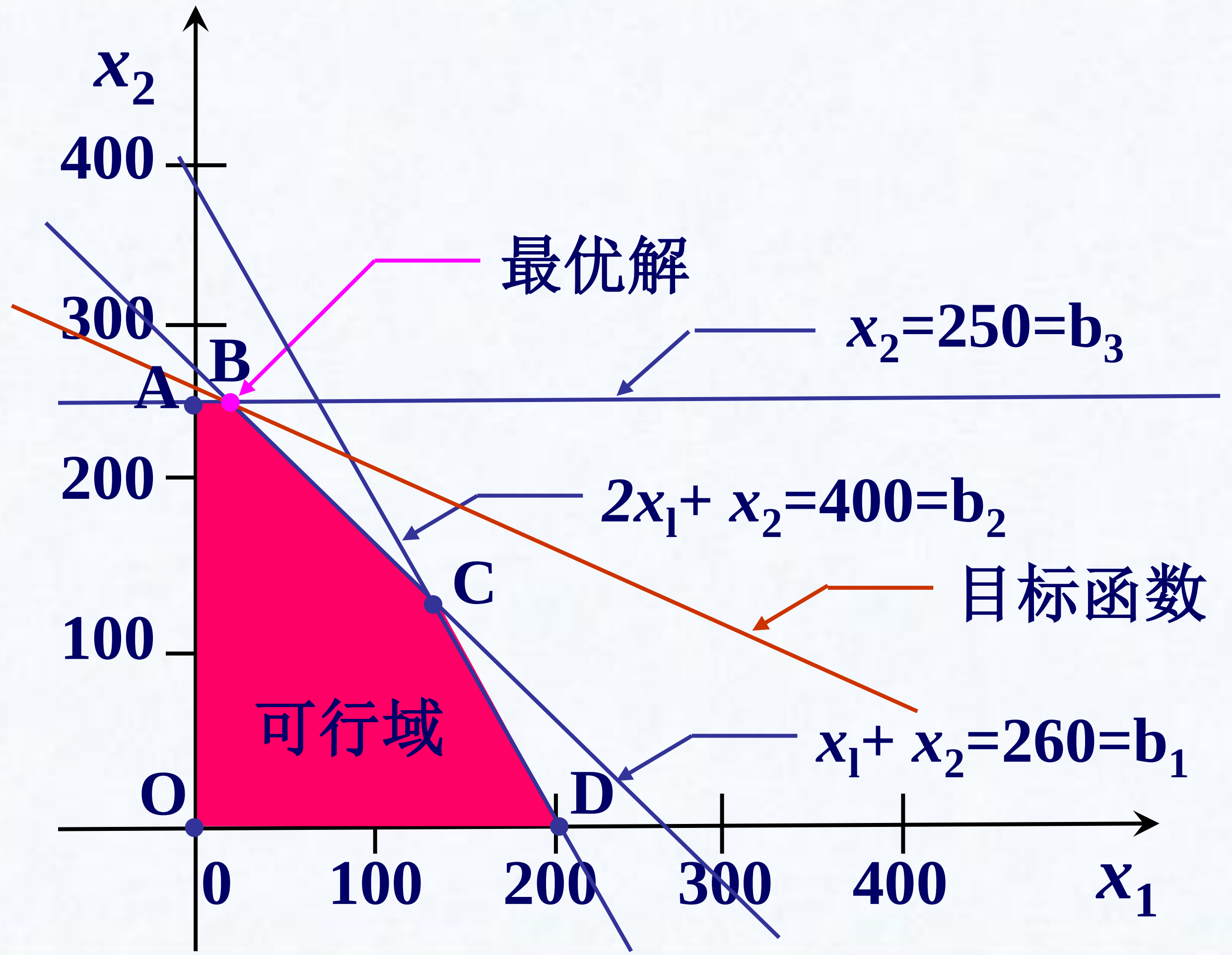
例2.9



约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

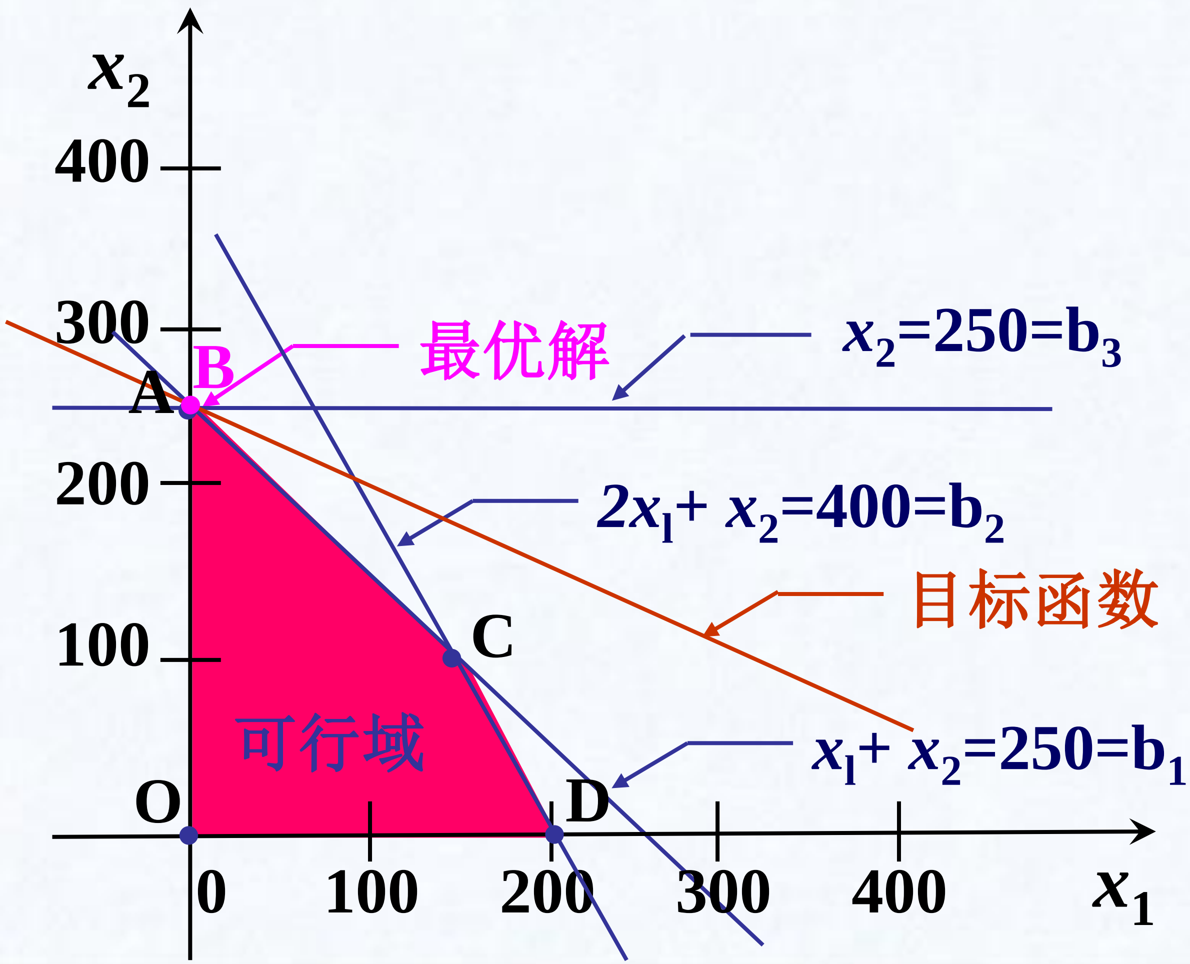
常数项b_1由300减小到260使可行域形状改变，而结构不变，所以对偶价格就不变。



约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

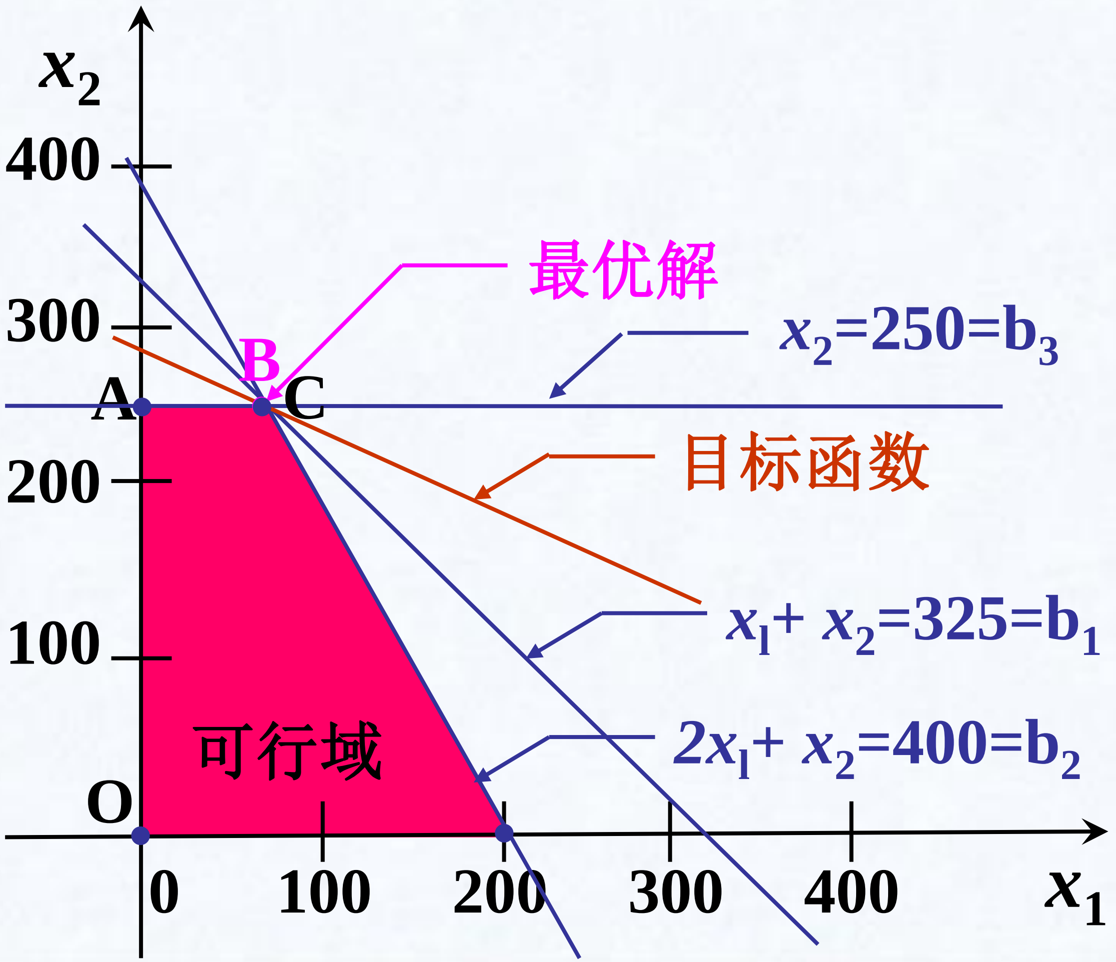
常数项继续减小，到可行域**结构**开始改变时的常数项值，就是这个约束条件常数项的下限值。即本例常数项b_1的下限为250。



约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

常数项增大，到可行域结构开始改变时的常数项值，就是这个约束条件常数项的上限值。即本例常数项b_1的上限为325。



约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

可得保持对偶价格D_1不变的b_1取值范围如下表：

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

同样方法，可得保持对偶价格D_2不变的b_2取值范围如下表：

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限

常数项变化影响

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

同样方法，可得保持对偶价格D_3

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限
b_3	200	250	300

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限
b_3	200	250	300

常数项变化影响

约束条件中常数项b_i的取值范围分析

例2.9

运筹学模型求解系统------线性规划问题

决策变量个数: 2　　约束条件个数: 3　　◉ 最大化 ○ 最小化　　求 解　　返 回

目标函数系数

x1	x2
50	100

约束条件系数

			约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	1	300	<	300
2	2	1	350	<	400
3		1	250	<	250

最优解

50	250

最优值

27500

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限
b_3	200	250	300

最优方案

目标函数变量系数

变量	最优解	相差值	下限值	当前值	上限值
X1	50	0	0	50	100
X2	250	0	50	100	1E+30

约束条件

常数项

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	下限值	当前值	上限值
1	300	0	50	250	300	325
2	350	50	0	350	400	1E+30
3	250	0	50	200	250	300

常数项变化影响

约束条件中资源配置系数a_{ij}的灵敏度分析

资源配置系数矩阵的变化改变了可行域各边界线段的斜率，即完全且不规则地改变了可行域的形状。

资源配置系数矩阵的变化对最优解的影响太繁杂，也不具有共性，可视为完全改变了原有的数学模型，另外求解。

六、百分之一百法则

百分之一百法则

多个价值系数同时变化的百分之一百法则：

如果多个价值系数同时变动，计算出每一个系数变动量占该系数允许变动量(允许增加量或允许减少量)的百分比，然后将各个系数的变动百分比相加，所得的和不超过100%，则原最优解不会改变。即：

$$\sum \frac{\text{增加后的参数值}-\text{当前值}}{\text{允许增加量}}+\sum \frac{\text{当前值}-\text{减少后的参数值}}{\text{允许减少量}} \leq 100\%$$

百分之一百法则

多个价值系数同时变化的百分之一百法则

例2.9 中，原来每件产品I和产品II的利润分别为50和100元，现在每件产品I和产品II的利润分别变为70和80元，对其进行灵敏度分析。

	最低限	当前值	最高限
C_1	0	50	100
C_2	50	100	不限

x_1的系数c_1的允许增加量为：$100\text{-}50 = 50$

x_2的系数c_2的允许减少量为：$100\text{-}50 = 50$

百分一百法则：

（70-50）/50+（100-80）/50=80 %

最优解不变，最优值为23500

多个价值系数同时变化的百分之一百法则

例2.9 中，原来每件产品I和产品II的利润分别为50和100元，现在每件产品I和产品II的利润分别变为70和70元，对其进行灵敏度分析。

	最低限	当前值	最高限
C_1	0	50	100
C_2	50	100	不限

x_1的系数c_1的允许增加量为：100-50＝50

x_2的系数c_2的允许减少量为：100-50＝50

百分之一百法则：

（70-50）/50+（100-70）/50=100 %

最优解不变，最优值为21000

百分之一百法则

多个价值系数同时变化的百分之一百法则

例2.9 中，原来每件产品I和产品II的利润分别为50和100元，现在每件产品I和产品II的利润分别变为70和69元，对其进行灵敏度分析。

	最低限	当前值	最高限
C_1	0	50	100
C_2	50	100	不限

x_1的系数c_1的允许增加量为：$100-50=50$

x_2的系数c_2的允许减少量为：$100-50=50$

百分之一百法则：

（70-50）/50+（100-69）/50=102 %

此时最优解由B点变为C点，即$x_1=100$，$x_2=200$

最优值为20800

百分之一百法则

多个常数项同时变化的百分之一百法则：

如果多个常数项同时变动，计算出每一个常数项变动量占该常数项允许变动量(允许增加量或允许减少量)的百分比，如果所有常数项的变动百分比之和不超过100%，则原对偶价格不会改变(仍然有效)。即：

$$\sum \frac{\text{增加后的参数值} - \text{当前值}}{\text{允许增加量}} + \sum \frac{\text{当前值} - \text{减少后的参数值}}{\text{允许减少量}} \leq 100\%$$

百分之一百法则

多个常数项同时变化的百分之一百法则

例2.9 中，设备台时数从300台时增加为315台时（上限325），而原料A从400kg减少到390 kg（下限350），原料B从250 kg减少到240kg（下限200）可得：

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限
b_3	200	250	300

百分之一百法则：

15/25+10/50+10/50=100%

没有超过100%，所以三个约束条件的对偶价格：50，0，50都不变。但最优值变为：27750

百分之一百法则

多个常数项同时变化的百分之一百法则

例2.9 中，设备台时数从300台时增加为316台时（上限325），而原料A从400kg减少到390 kg（下限350），原料B从250 kg减少到240kg（下限200）可得：

	最下限	当前值	最高限
b_1	250	300	325
b_2	350	400	不限
b_3	200	250	300

百分之一百法则：

16/25+10/50+10/50=104%

超过了100%

对偶价格分别由原来的50，0，50改变为0，25，75

百分之一百法则

百分之一百法则的四个特点：

1、当允许增(减)量为无穷大时，则对于任一个对应参数的增(减)量，其允许增(减)的百分比都看成零。这时灵敏度的分析结果就只取决于其它参数的变化。

百分之一百法则

百分之一百法则的四个特点：

2、百分之一百法则是判断最优解或对偶价格是否发生变化的充分条件，但不是必要条件。也就是说，当其允许增(减)的百分比之和不超过(小于)100%时，其最优解或对偶价格不变；但是当其允许增(减)的百分比之和超过(大于)100%时，我们并不知道其最优解或对偶价格是否发生变化。

百分之一百法则

百分之一百法则的四个特点：

3、百分之一百法则中，最优解或对偶价格不变的条件还包括对应全部同类参数同比例增加或同比例减小，而判断值大于百分之一百的情况。

百分之一百法则

百分之一百法则的四个特点：

4、百分之一百法则不能应用于目标函数决策变量系数（价值系数）和约束条件中常数项同时变化的情况，在这种情况下，只能重新求解。

七、相差值分析

相差值分析

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

"相差值"也称作"递减成本"

或"缩减成本"

所谓目标函数变量系数的相差值，是指最优解中为0的变量，在其它变量系数保持不变的前提下，使最优解中该变量的值不为0时，相应目标函数变量系数由现有值再改变的量。

相差值分析

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

例3.1 将本讲的例2.9 中，原料B的限制量改变为301kg，其它条件都不变（如下表），重新决策。

产品 / 资源	I	II	资源限制
设备	1	1	300台时
原料A	2	1	400kg
原料B	0	1	301kg

相差值分析

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

线性规划数学模型：

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

S.T.

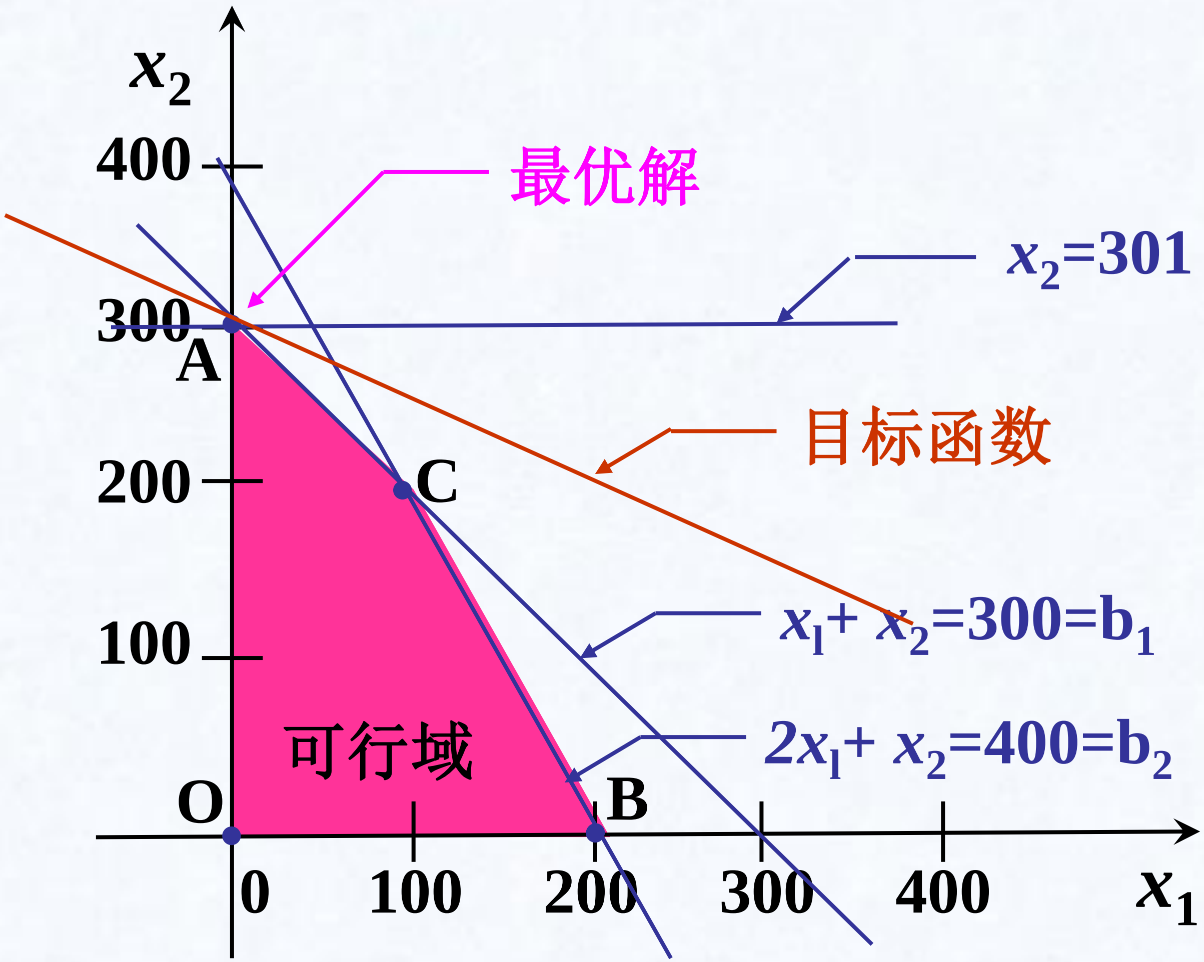
$$x_1 + x_2 \le 300$$
$$2x_1 + x_2 \le 400$$
$$x_2 \le 301$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$$

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

S.T.

$$x_1 + x_2 \le 300$$
$$2x_1 + x_2 \le 400$$
$$x_2 \le 301$$
$$x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0$$

目标函数中变量系数c_j的相差值分析



$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

$$\text{S.T.}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 300 \\ 2x_1 + x_2 &\le 400 \\ x_2 &\le 301 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

最优解：

$x_1=0$

$x_2=300$

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

例3.1

由于x_1=0，所以在可行域和x_2的系数都不变的前提下，要改变当前的解（x_1=0，x_2=300），只有增加变量x_1的系数c_1的值，使目标函数直线与x_1+x_2=300斜率一样时，才能使得x_1真正等于或大于0。即：

$$-\frac{c_1+\text{相差值}}{c_2}=-1 \quad \text{或} \quad -\frac{50+\text{相差值}}{100}=-1$$

得：相差值1=50

而$x_2 \neq 0$，所以相差值2=0

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

例3.1

由于$x_1=0$，算得　　相差值1=50

由于$x_2\neq 0$，所以　　相差值2=0

相差值1=50

相差值2=0

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

例3.1

运筹学模型求解系统-------线性规划问题

决策变量个数: 2　约束条件个数: 3　最大化　最小化　求 解　返 回

目标函数系数

	x1	x2	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	50	100			
约束条件系数					
1	1	1	300	<	300
2	2	1	300	<	400
3		1	300	<	301
最优解	0	300		最优值	30000

相差值1=50

相差值2=0

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	0	50	-1E+30	50	100
X2	300	0	50	100	1E+30

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	300	0	100	0	300	301
2	300	100	0	300	400	1E+30
3	300	1	0	300	301	1E+30

相差值分析

目标函数中变量系数c_j的相差值分析

最优解	相差值	c_j	
		求最大化目标	求最小化目标
=0	>0	当前值+相差值 =上限且无下限 最优解才不为0	当前值-相差值 =下限且无上限 最优解才不为0
>0	必 =0		

七组决策量关系

一、 最优解与实际值

二、 松弛量与剩余量

三、 价值系数变化影响

四、 对偶价格

五、 常数项变化影响

六、 百分之一百法则

七、 相差值分析

LP灵敏度分析

四大基本概念

最 优 解

松弛/剩余

对偶价格

为 0 的解

灵敏度分析的四大基本概念及影响关系

四大概念	决策意义	影响关系	变化因素	变化条件
最 优 解	最优方案	价值系数	取值范围	不变(百分之一百)
松弛/剩余	资源利用	最 优 解	与对偶价格存在密切关系	
对偶价格	资源价值	常 数 项	取值范围	不变(百分之一百)
为0 的解	不作为方案	价值系数	临界点	不变(未达临界点)

课堂练习2

数据分析：某厂利用2种原料A、B生产甲、乙、丙3种产品，生产单位产品所需原料数（公斤）、单件利润（元/单位）及有关数据如下表：

	甲	乙	丙	原料拥有量
A	7	6	8	550
B	6	4	2	360
单位利润	500	460	360	

此问题的线性规划数学模型：

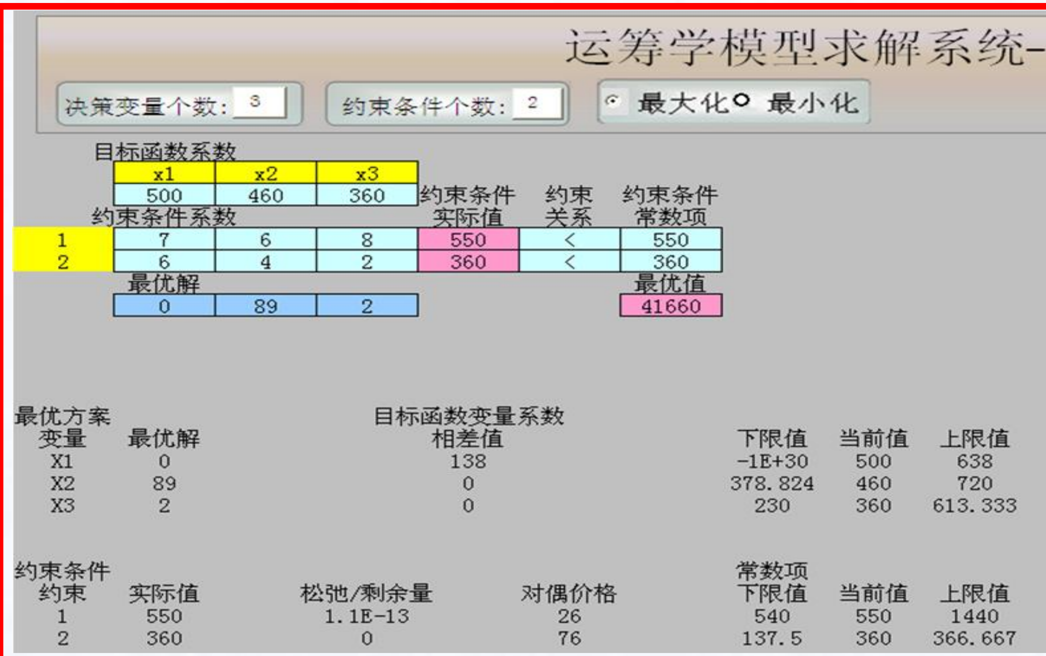
$$\max z = 500x_1+460x_2+360x_3$$

$$\text{s.t.}\quad 7x_1+6x_2+8x_3\le 550$$

$$6x_1+4x_2+2x_3\le 360$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ge 0$$

该模型的决策结果如右图：


运筹学模型求解系统--

决策变量个数: 3　约束条件个数: 2　最大化　最小化

目标函数系数

	x1	x2	x3	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
	500	460	360			
约束条件系数 1	7	6	8	550	<	550
2	6	4	2	360	<	360
最优解	0	89	2		最优值	41660

最优方案

变量	最优解	目标函数变量系数相差值	下限值	当前值	上限值
X1	0	138	-1E+30	500	638
X2	89	0	378.824	460	720
X3	2	0	230	360	613.333

约束条件

约束	实际值	松弛/剩余量	对偶价格	常数项下限值	当前值	上限值
1	550	1.1E-13	26	540	550	1440
2	360	0	76	137.5	360	366.667

1、该模型的最优解和最优值是多少，分别表示什么？

2、在该方案中，产品甲不生产，那么在什么情况下产品甲就可以投产了，为什么？

3、若其它企业愿意分别以高出市场价格45元/公斤出售原料A和B，该厂应不应该购进而扩大生产？为什么？

本章小结

重点内容：

1. 松弛量/剩余量
2. 对偶价格
3. 价值系数范围
4. 常数项范围
5. 百分之一百法则
6. 相差值

THE END， Thanks！