兰州大学 管理学院
School of Management ,Lanzhou University

第五讲　整数规划模型

宗胜亮

zongshl@lzu.edu.cn

Data
Models & Decisions

课程知识结构导航

纵横运筹学

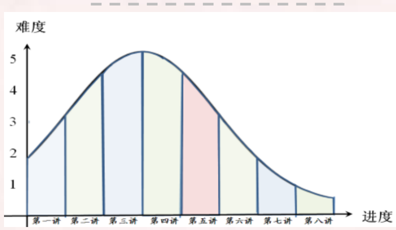
理论分析

数据、模型、决策

不确定型决策

风险型决策

确定型决策



运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之一百法则
相差值分析

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输问题模型
目标规划模型
网络优化模型

最短路模型
最小费用流模型
最大流模型
最小支撑树模型

生产安排问题
排班问题
套裁下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运问题模型

有优先级目标规划
加权目标规划

案例展示

案例5.1 某工厂用两种原材料A和B生产两种产品I、II，两种产品的定额及原材料库存情况如下表。

表 产品定额及相关数据

货物	产品I(件)	产品II(件)	原材料库存量
原材料A(Kg)	2	3	14
原材料B(Kg)	2	1	9

每件产品I和产品II可获得的利润分别为3元和2元。问工厂应如何安排生产，使总利润最高？

案例展示

可得一般线性规划数学模型：

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

求解得结果：

$x_1 = 3.25$，$x_2 = 2.5$ ⟶ 产品I安排生产3.25件

产品II安排生产2.5件 ？

最优值：14.75

案例展示

决策变量非整数不符合实际。若凑整：

$x_1=4，x_2=3$

$x_1=4，x_2=2$

$x_1=3，x_2=3$

$x_1=3，x_2=2$

有2^n个凑法（n= 变量数）

问题

1.对于多个变量无法计算

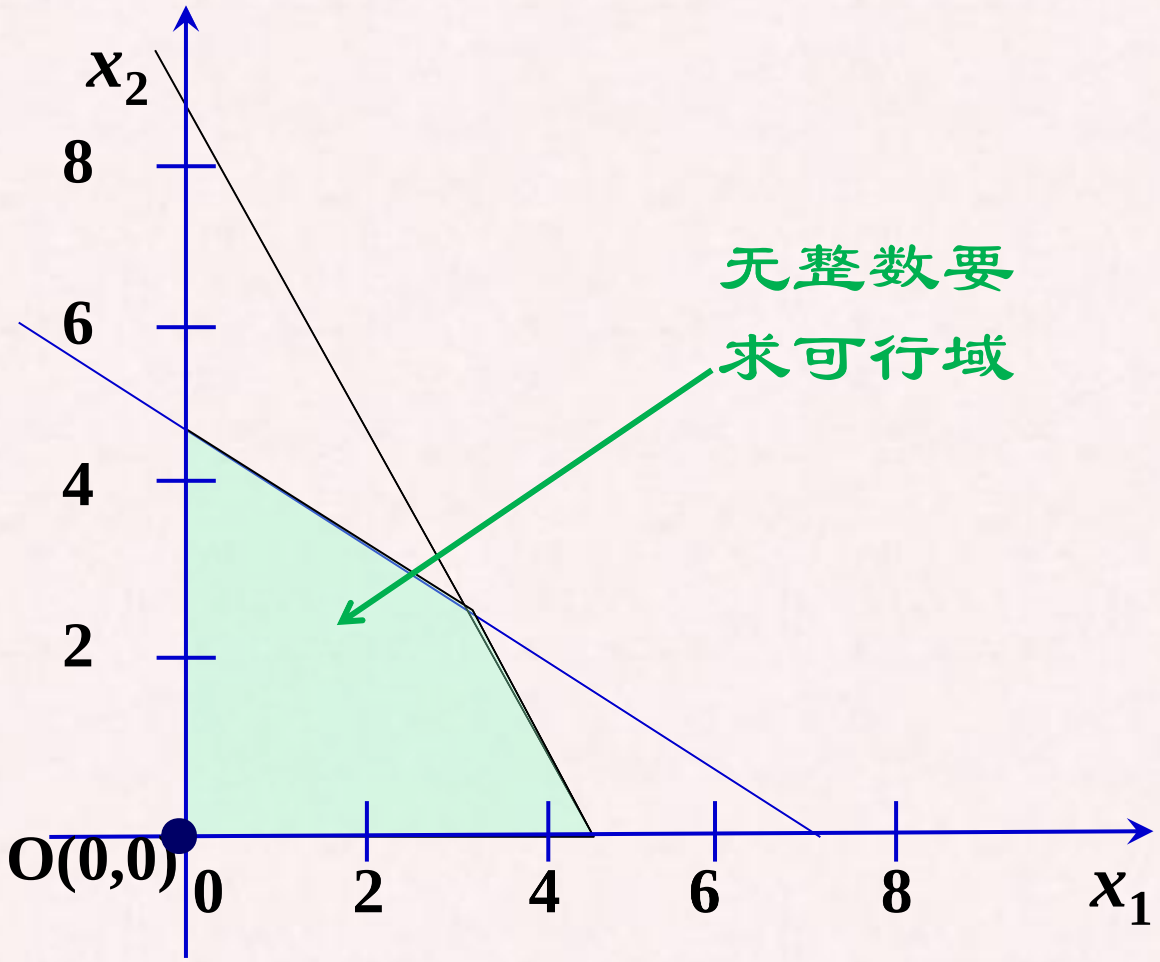
2.并且凑出大部分解都是不可行的

3.还很有可能凑出解都不是最优解

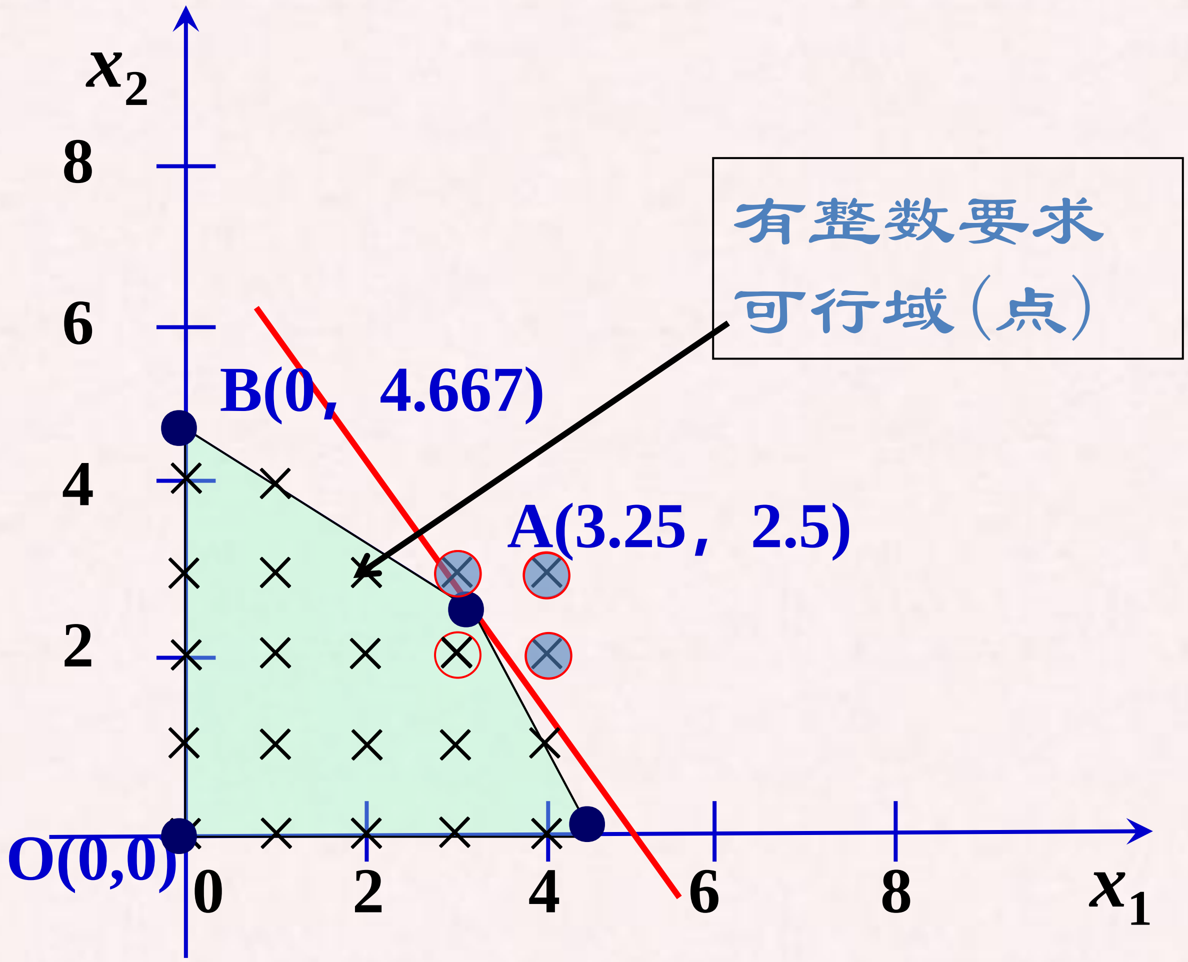
$\longrightarrow$ 不可行

案例展示

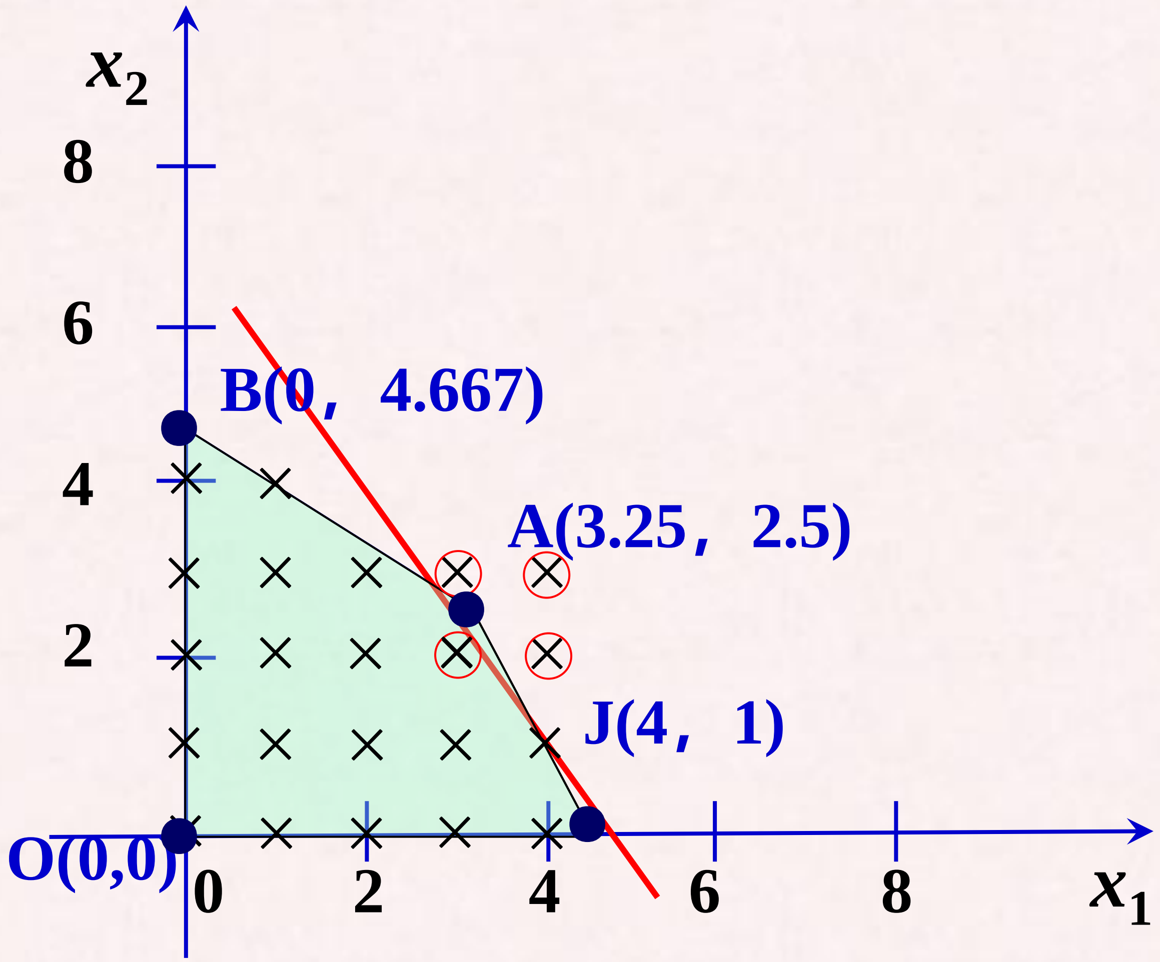
现在用图解法求解案例5.1



现在用图解法求解案例5.1（有整数要求）



案例展示



理论解析

理论解析

两个重要结论：

- 整数规划问题，根本就不能简单地用一般线性规划方法求解后，再用凑整的方法来解决。必须要用特殊的规划求解方法来求解。
- 一般整数规划的目标函数值都会差于没有整数要求的目标函数值。

整数规划模型

整数规划与一般线性规划类似，但又具有特殊性，整数规划模型的表述只需在一般线性规划数学模型中加入整数的属性即可。但求解模型却是独立于一般线性规划的特殊模型。

如案例5.1的整数规划模型为：

特殊要求

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 \le 14$$

$$2x_1 + x_2 \le 9$$

x_1，$x_2 \ge 0$，且x_1，x_2为纯整数

理论解析

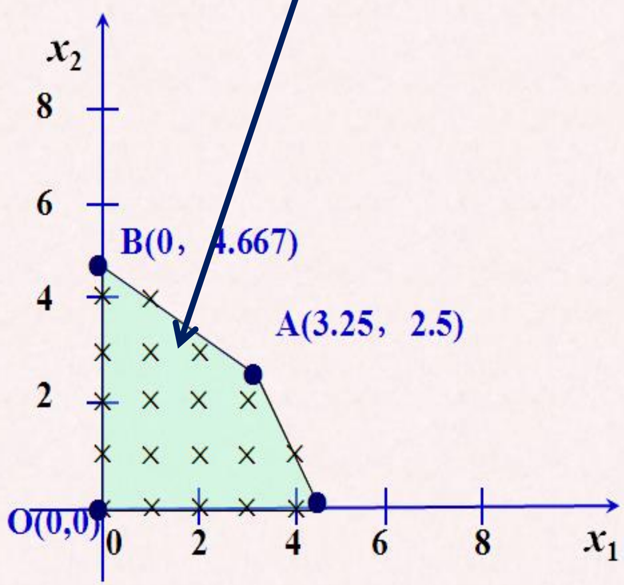
整数规划模型的分类

由于整数规划模型与一般线性规划模型分不开，且整数的情况又有多种，所以整数规划可以分为三类：

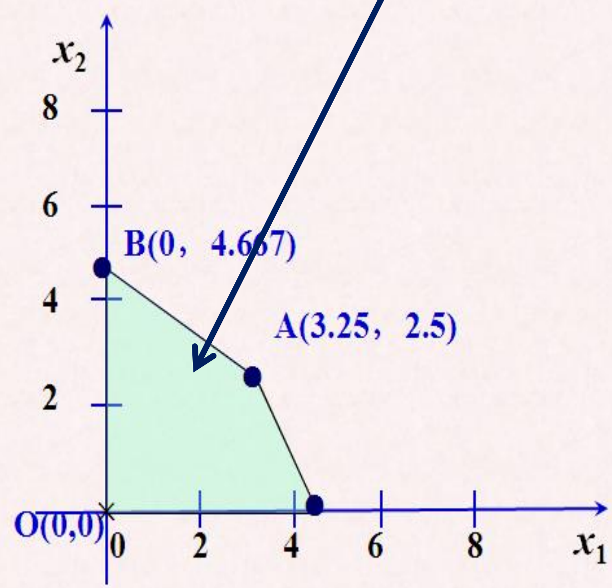
- 纯整数规划（所有变量全都是非负整数）
- 0-1整数规划（所有变量全都是0-1整数）
- 混合整数规划（三种变量都可以，但要指定）

整数规划思想：

整数规划



整数规划的松弛问题



模型求解

1、二维整数规划的图解法　（特殊可行域）

2、手工求解方法

分枝定界法 割平面法	一般整数规划模型
隐枚举法 匈牙利法	0-1整数规划模型

3、计算机求解　（在线性规划基础上，指定整数要求即可）

模型求解

整数规划模型的计算机求解

纯整数规划和0-1整数规划模型用特殊的求解模型（工具）

混合整数规划模型的求解需要分别对整数变量做指定说明

以例5. 1为例（纯整数规划模型）

课堂练习1

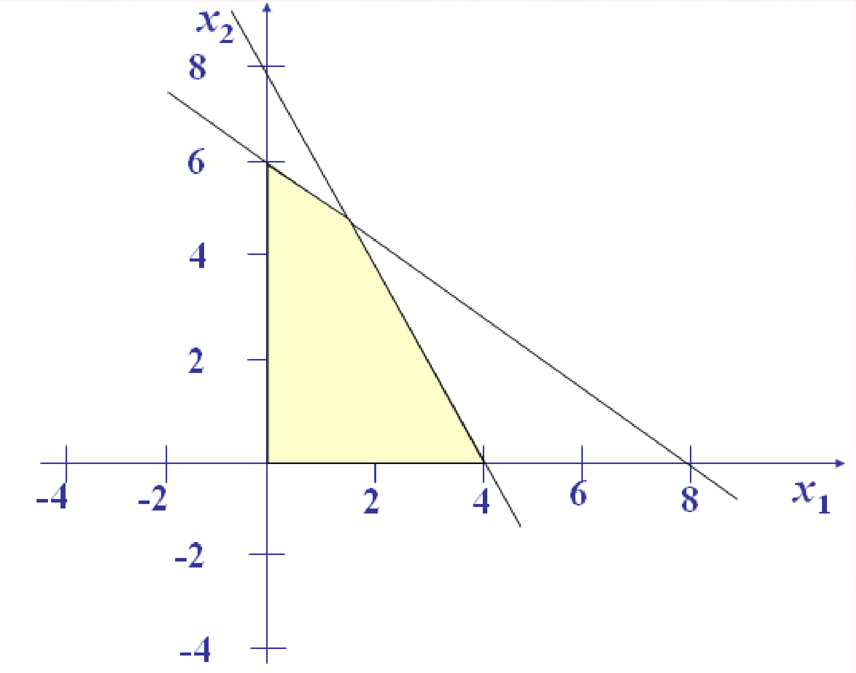
模型转换： 将下面的一般线性规划数学模型（整数规划的松弛问题）转换为**纯整数规划模型**。并在一般线性规划模型的可行域图形中标出整数规划的可行域（在图上用“×”标出）。

$$\max \quad z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 8x_1 + 4x_2 \le 32$$

$$6x_1 + 8x_2 \le 48$$

$$x_1,\ x_2 \ge 0$$



整数规划模型的应用

- 选址问题
- 人力资源分配问题
- 连续投资问题

例5.1 工商银行准备用不超过900万元的投资，完成在兰州市五个城区扩展银行储蓄所。拟议中有14个位置B_i（i=1, 2, 3, …, 14）可以选择，考虑到各地区居民的消费水平及居民居住密集度，规定：

在城关区由B_1，B_2，B_3，B_4四个点中最多选择三个；
在七里河区由B_5，B_6，B_7三个点中至少选两个；
在安宁区由B_8，B_9两个点中至少选一个；
在西固区由B_{10}，B_{11}两个点中至少选一个；
在红古区由B_{12}，B_{13}，B_{14}三个点中至少选两个。
B_i各点的设备投资及每年可获利润由于地点不同都是不一样的，预测情况如下表所示。

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}
投资额	80	100	120	110	70	90	80	140	160	150	130	60	80	70
利润	36	54	22	28	35	23	46	59	60	40	28	25	35	40

问应选择哪几个储蓄点，可使总的年利润最大？

一、确定决策变量

设0-1(选址)变量

$$x_i = \begin{cases} 1 & B_i\text{点被选用} \\ 0 & B_i\text{点不被选用} \end{cases}$$

$$i=1, 2, \ldots\ldots, 14$$

如下表：

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}
投资额	80	100	120	110	70	90	80	140	160	150	130	60	80	70
利润	36	54	22	28	35	23	46	59	60	40	28	25	35	40
选与否	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

二、确定目标函数

本决策问题的目标是求最后获得的利润最大，每个点只要选上，就可以获得相应的利润，而选不上就自然得不到利润，因而总利润为：

$$z=36x_1+54x_2+22x_3+28x_4+35x_5+23x_6+46x_7+59x_8+60x_9+40x_{10}+28x_{11}+25x_{12}+35x_{13}+40x_{14}$$

所以目标函数为：

$$\max z=36x_1+54x_2+22x_3+28x_4+35x_5+23x_6+46x_7+59x_8+60x_9+40x_{10}+28x_{11}+25x_{12}+35x_{13}+40x_{14}$$

选址问题

三、确定约束条件

首先是总投资额不超过900万元

$$80\,x_1+100\,x_2+120\,x_3+110\,x_4+70\,x_5+90\,x_6+80\,x_7+140\,x_8+160\,x_9+150\,x_{10}+130\,x_{11}+60\,x_{12}+80\,x_{13}+70\,x_{14}\le 900$$

其次是各区选址的数量限制

$x_1+x_2+x_3+x_4\le 3$　（城关区从四个点最多选择三个）

$x_5+x_6+x_7\ge 2$　（七里河区从三个点中至少选两个）

$x_8+x_9\ge 1$　（安宁区从两个点中至少选一个）

$x_{10}+x_{11}\ge 1$　（西固区从两个点中至少选一个）

$x_{12}+x_{13}+x_{14}\ge 2$　（红古区从三个点中至少选两个）

得0-1整数规划模型：

$$\max z = 36x_1+54x_2+22x_3+28x_4+35x_5+23x_6+46x_7+59x_8 +60x_9+40x_{10}+28x_{11}+25x_{12}+35x_{13}+40x_{14}$$

s.t.

$$80x_1+100x_2+120x_3+110x_4+70x_5+90x_6+80x_7+140x_8+160x_9+150x_{10}+130x_{11}+60x_{12}+80x_{13}+70x_{14} \le 900$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \le 3$$

$$x_5+x_6+x_7 \ge 2$$

$$x_8+x_9 \ge 1$$

$$x_{10}+x_{11} \ge 1$$

$$x_{12}+x_{13}+x_{14} \ge 2$$

$x_i \ge 0$且 x_i 为0-1变量, $i = 1, 2, 3, \ldots, 14$

模型求解

选址问题

运筹学模型求解系统------0-1整数规划问题

决策变量个数: 14　约束条件个数: 6　◉ 最大化 ○ 最小化　求 解　返 回　存 盘　导 入

目标函数系数

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14
36	54	22	28	35	23	46	59	60	40	28	25	35	40

约束条件系数

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	80	100	120	110	70	90	80	140	160	150	130	60	80	70	890	<	900
2	1	1	1	1											2	<	3
3					1	1	1								2	>	2
4								1	1						2	>	1
5										1	1				1	>	1
6												1	1	1	2	>	2

最优解

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14
1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1

最优值: 383

选址问题

求解结果如下表：

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}
投资额	80	100	120	110	70	90	80	140	160	150	130	60	80	70
利润	36	54	22	28	35	23	46	59	60	40	28	25	35	40
选与否	√	√			√		√	√	√		√	√		√

实际投资：890万元，可获最高利润：383万元。

由于线性规划的灵敏度分析是建立在数学连续基础上的分析方法。而整数规划已打破了数学连续的概念，所以所有整数规划问题计算机都不再给灵敏度分析报告。

而关于松弛量和剩余量的概念仍有实际意义，这些可以直接算出。

课堂练习2

某单位拟在以下5个项目中选择投资，已知每个项目的投资额和期望收益如下表所示：

项目	所需投资额（万元）	期望收益（万元）
A	6	10
B	4	8
C	2	7
D	4	6
E	5	9

1、A、C、E之间必须选择一项，且仅需选择一项；

2、B和D之间须选择，也仅需选择一项；

3、C和D密切相关，C的实施必须以D的实施为前提条件。

该单位有资金15万元，应选择哪些项目进行投资，才能使期望收益最大？

选址问题

例5.2 一企业在兰州已有一个生产具有西北特产药材的中药厂，其产品的年生产能力为3万件，并且已在新疆、黑龙江、广东设立了三个固定的分销点。现在为了扩大生产，打算在北京、广州、成都和沈阳四处再选择几个地方建厂。各地建厂的固定成本、兰州厂及新建厂的产量、各分销点的销量以及产地到销地的单位运价（元/件）如下表所示。问应该在哪几个地方新建厂，在满足销量的前提下，使工厂扩建后总的固定成本和总的运输费用之和最少。

运输价格 产地＼销地	新疆	黑龙江	广东	固定成本（元）	产量（件）
兰州	8	15	10	0	30000
北京	12	7	9	370000	20000
广州	18	16	1	300000	40000
成都	11	12	8	375000	30000
沈阳	19	4	15	500000	10000
销量（件）	30000	20000	20000		

一、确定决策变量

设已建的一个生产点和四个预建生产点到三个分销点的运输量分别为x_i(i=1, 2……15)。

另设四个选址变量y_j (j=1, 2, 3, 4)。具体设置如下表：

运输数量 销地 / 产地	新疆	黑龙江	广东	选择否	固定成本（元）	产量（件）
兰州	x_1(8)	x_2(15)	x_3(10)		0	30000
北京	x_4(12)	x_5(7)	x_6(9)	y_1	370000	20000
广州	x_7(18)	x_8(16)	x_9(1)	y_2	300000	40000
成都	x_{10}(11)	x_{11}(12)	x_{12}(8)	y_3	375000	30000
沈阳	x_{13}(19)	x_{14}(4)	x_{15}(15)	y_4	500000	10000
销量（件）	30000	20000	20000			

选址问题

二、确定目标函数

本问题的目标是扩建后总的固定成本和总的运输费用之和最少

而扩建后总的固定成本为：

$$370000\,y_1 + 300000\,y_2 + 375000\,y_3 + 500000\,y_4$$

总的运输费用为：

$$8\,x_1+15\,x_2+10\,x_3+12\,x_4+7\,x_5+9\,x_6+18x_7+16\,x_8+x_9+11\,x_{10}+12\,x_{11}+8\,x_{12}+19\,x_{13}+4\,x_{14}+15\,x_{15}$$

本问题的目标函数为：

$$\min\quad f= 8x_1+15x_2+10x_3+12x_4+7\,x_5+9x_6+18x_7+16x_8+x_9+11x_{10}+12x_{11}+8\,x_{12}+19\,x_{13}+4\,x_{14}+15x_{15} + 370000\,y_1+ 300000\,y_2+ 375000\,y_3+500000\,y_4$$

选址问题

三、确定约束条件

本问题约束条件来自两个方面：总产量的约束和总销量的约束

总产量的约束：

$x_1 + x_2 + x_3 \le 30000$ （兰州厂的产量）

$x_4 + x_5 + x_6 \le 20000 y_1$ （北京厂的产量）

$x_7 + x_8 + x_9 \le 40000 y_2$ （广州厂的产量）

$x_{10} + x_{11} + x_{12} \le 30000 y_3$ （成都厂的产量）

$x_{13} + x_{14} + x_{15} \le 10000 y_4$ （沈阳厂的产量）

总销量的约束：

$x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} + x_{13} = 30000$ （新疆的销量）

$x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} + x_{14} = 20000$ （黑龙江的销量）

$x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} + x_{15} = 20000$ （广东的销量）

得本问题的混合整数规划数学模型

$$\min \quad f=8x_1+15x_2+10x_3+12x_4+7x_5+9x_6+18x_7+16x_8+x_9+11x_{10}+12x_{11}+8x_{12}$$
$$+19x_{13}+4x_{14}+15x_{15}+370000y_1+300000y_2+375000y_3+500000y_4$$

s.t.

$$x_1+x_2+x_3\le 30000$$
$$x_4+x_5+x_6-20000y_1\le 0$$
$$x_7+x_8+x_9-40000y_2\le 0$$
$$x_{10}+x_{11}+x_{12}-30000y_3\le 0$$
$$x_{13}+x_{14}+x_{15}-10000y_4\le 0$$
$$x_1+x_4+x_7+x_{10}+x_{13}=30000$$
$$x_2+x_5+x_8+x_{11}+x_{14}=20000$$
$$x_3+x_6+x_9+x_{12}+x_{15}=20000$$

x_i 为非负整数 (i=1, 2, …, 15)

y_j 为0-1变量 (j=1, 2, …, 4)

模型求解

选址问题

运筹学模型求解系统------混合整数规划问题

决策变量个数: 19　约束条件个数: 8　○ 最大化 ◉ 最小化　求 解　返 回　存 盘　导 入

目标函数系数

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19
8	15	10	12	7	9	18	16	1	11	12	8	19	4	15	370000	300000	375000	500000

约束条件系数

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19	约束条件实际值	约束关系	约束条件常数项
1	1	1	1																	30000	<	30000
2				1	1	1										-20000				0	<	0
3							1	1	1								-40000			0	<	0
4										1	1	1						-30000		-4E-28	<	0
5													1	1	1				-10000	0	<	0
6	1			1			1			1			1							30000	=	30000
7		1			1			1			1			1						20000	=	20000
8			1			1			1			1			1					20000	=	20000

最优解

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	x11	x12	x13	x14	x15	x16	x17	x18	x19
	30000	0	0	0	0	0	0	20000	20000	0	0	0	0	0	0	0	1	1.3E-32	0
整数属性:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2

最优值: 880000

1: 整数变量、2: 0-1变量

选址问题

求解结果：

运输数量（销地 / 产地）	新疆	黑龙江	广东	选择否	固定成本（元）	产量（件）
兰州	30000	0	0		0	30000
北京	0	0	0	0	370000	20000
广州	0	20000	20000	1	300000	40000
成都	0	0	0	0	375000	30000
沈阳	0	0	0	0	500000	10000
销量（件）	30000	20000	20000			

即：只选择在广州新增建厂，产量40000件，分别运往黑龙江20000件，广东20000件；兰州生产的30000件全部运往新疆。扩建费和运费为：88万元。

注：用计算机求解这类模型时，将变量y换为x。

选址问题

智能式应用方法：

运输价格 销地 / 产地	新疆	黑龙江	广东	固定成本（元）	产量（件）
兰州	8	15	10	0	30000
北京	12	7	9	370000	20000
广州	18	16	1	300000	40000
成都	11	12	8	375000	30000
沈阳	19	4	15	500000	10000
销量（件）	30000	20000	20000		

课堂练习3

某公司计划在北京、上海、广州和武汉四个城市新建库房，主要负责向华北、华中和华南地区供货，每个库房可处理货物2000件/月，这四个备选城市新建库房的每月成本、三个地区的平均月需求量，以及每个库房到每个需求地的单位运费（单位：元/件）如下表所示。

	华北	华中	华南	新建成本（万元）	产量（件）
北京	200	400	500	5.5	2000
上海	300	250	400	4	2000
广州	600	350	300	6	2000
武汉	350	150	350	5	2000
平均月需求量（件）	1000	1600	1400		

问题是该公司希望在满足地区需求的情况下使平均月成本最少。满足以下条件：（1）若在武汉建库房，则上海也必须要建；（2）最多建两个库房；（3）上海和广州不能同时建。请建立数学模型。

课堂练习4

某企业在A_1地已有一个工厂，其产品的生产能力为5万箱，产品专供于B_1、B_2两个销地。为了扩大生产，准备在A_2、A_3两地再进行扩建。经考察，在A_2地建厂的固定成本为15.5万元，而在A_3地建厂的固定成本为21万元。三个厂建成后的产能量、销地的需求量以及产地到销地的单位运价（万元/万箱）如下表：

	B_1	B_2	固定成本/万元	产量/万箱
A_1	6	4.5	0	5
A_2	5	5.6	15.5	6
A_3	3.5	2	21	9
销量（万箱）	7.5	2.5		

请建立模型确定在哪里建厂，在满足销量的前提下，使总的固定成本和运输成本之和最低。

人力资源分配问题

例5.3 有四个工人（甲、乙、丙、丁），要分别指派他们完成四项不同的工作（A、B、C、D），每人做各项工作所消耗的时间如下表所示。问应如何指派工作，才能使总的消耗时间为最少？

每人完成各项工作所需时间：小时

工作 / 时间 / 工人	工作A	工作B	工作C	工作D
甲	35	41	27	40
乙	47	45	32	51
丙	39	56	36	43
丁	32	51	25	46

人力资源分配问题

对于这类问题，实际要求每人只能完成一项工作任务；每项工作只能提供给一个人来完成。其实这也是本问题限制条件。因此，我们可以将各项工作的人数和每人完成的任务数加到上述的表中，我们称下表为**工作效率表**：

工作效率表

时间 工作 工人	工作A	工作B	工作C	工作D	人数
甲	35	41	27	40	1
乙	47	45	32	51	1
丙	39	56	36	43	1
丁	32	51	25	46	1
任务数	1	1	1	1	

人力资源分配问题

一、设置决策变量

引入0－1变量x_i，如下表所示

工作 / 变量 / 工人	工作A	工作B	工作C	工作D	人数
甲	x_1 (35)	x_2 (41)	x_3 (27)	x_4 (40)	1
乙	x_5 (47)	x_6 (45)	x_7 (32)	x_8 (51)	1
丙	x_9(39)	x_{10}(56)	x_{11}(36)	x_{12}(43)	1
丁	x_{13}(32)	x_{14}(51)	x_{15}(25)	x_{16} (46)	1
任务数	1	1	1	1	

这里：变量$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当指派第}i\text{人去完成工作时} \\ 0, & \text{当不指派第}i\text{人去完成工作时} \end{cases}$

人力资源分配问题

二、确定目标函数

本问题的目标是使总消耗时间为最小，而总时间为所有分配了工作所占用时间的总和，可表述为：

$$35x_1+41x_2+27x_3+40x_4+47x_5+45x_6+32x_7+51x_8+39x_9+56x_{10}+36x_{11}+43x_{12}+32x_{13}+51x_{14}+25x_{15}+46x_{16}$$

所以目标函数为：

$$\min \quad f=35x_1+41x_2+27x_3+40x_4+47x_5+45x_6+32x_7+51x_8+39x_9+56x_{10}+36x_{11}+43x_{12}+32x_{13}+51x_{14}+25x_{15}+46x_{16}$$

人力资源分配问题

三、确定约束条件

本问题的约束条件来自两个方面：

每人只能干一项工作：

$x_1+x_2+x_3+x_4=1$ （甲只能干一项工作）

$x_5+x_6+x_7+x_8=1$ （乙只能干一项工作）

$x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=1$ （丙只能干一项工作）

$x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=1$ （丁只能干一项工作）

每项工作只能由一人来做：

$x_1+x_5+x_9+x_{13}=1$ （A工作只能一个人干）

$x_2+x_6+x_{10}+x_{14}=1$ （B工作只能一个人干）

$x_3+x_7+x_{11}+x_{15}=1$ （C工作只能一个人干）

$x_4+x_8+x_{12}+x_{16}=1$ （D工作只能一个人干）

得0-1整数规划模型

$$\min\quad f=35x_1+41x_2+27x_3+40x_4+47x_5+45x_6+32x_7+51x_8+39x_9$$
$$+56x_{10}+36x_{11}+43x_{12}+32x_{13}+51x_{14}+25x_{15}+46x_{16}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_5+x_6+x_7+x_8=1 \\ x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}=1 \\ x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}=1 \\ x_1+x_5+x_9+x_{13}=1 \\ x_2+x_6+x_{10}+x_{14}=1 \\ x_3+x_7+x_{11}+x_{15}=1 \\ x_4+x_8+x_{12}+x_{16}=1 \end{cases}$$

$$x_i=0, 1\quad (i=1, 2, \ldots, 16)$$

模型求解

人力资源分配问题

决策结果：

指派结果表

结果 \ 工作 / 工人	工作A	工作B	工作C	工作D	工作人总数
甲	0	0	1	0	1
乙	0	1	0	0	1
丙	0	0	0	1	1
丁	1	0	0	0	1
每人选择工作	1	1	1	1	

即：安排甲 工人完成工作C，安排乙 工人完成工作B，安排丙 工人完成工作D，安排丁 工人完成工作A。消耗总时间最少为147小时。

人力资源分配问题

智能式应用方法：

工作效率表

时间 工作 工人	工作A	工作B	工作C	工作D	人数
甲	35	41	27	40	1
乙	47	45	32	51	1
丙	39	56	36	43	1
丁	32	51	25	46	1
任务数	1	1	1	1	

人力资源分配问题

重要结论：

指派问题中的“工作效率表”就是指派问题的数学表述模型（也称指派模型）。

课堂练习5

某航空公司经营兰州、北京、广州三个城市之间的航线，其中兰州—北京飞行时间为2小时；北京—广州及广州—兰州飞行时间都为3小时，这些航线每天班机起飞与到达时间如下表：

航班号	起飞城市	起飞时间	到达城市	到达时间
1011	兰州	6:00	北京	8:00
1012	兰州	12:00	北京	14:00
1013	兰州	18:00	北京	20:00
2011	兰州	7:00	广州	10:00
2012	兰州	9:00	广州	12:00
1021	北京	7:00	兰州	9:00
1022	北京	10:00	兰州	12:00
1023	北京	17:00	兰州	19:00
2021	广州	14:00	兰州	17:00
2022	广州	17:00	兰州	20:00
3011	北京	5:00	广州	8:00
3012	北京	9:00	广州	12:00
3013	北京	13:00	广州	16:00
3014	北京	18:00	广州	21:00
3021	广州	6:00	北京	9:00
3022	广州	10:00	北京	13:00
3023	广州	14:00	北京	17:00
3024	广州	18:00	北京	21:00

设飞机在机场停留期间的费用与停留时间的平方成正比，又每架飞机从降落到再起飞至少需要2小时的时间准备。确定一个使总的停留费用为最小的方案。

课堂练习5

三个城市航班情况

兰州

停留时间/小时 到达 \ 起飞		航班号	1011	2011	2012	1012	1013
		起飞时间	6：00	7：00	9：00	12：00	18：00
航班号	到达时间						
1021	9：00		21	22	24	3	9
1022	12：00		18	19	21	24	6
2021	17：00		13	14	16	19	25
1023	19：00		11	12	14	17	23
2022	20：00		10	11	13	16	22

北京

停留时间/小时 到达 \ 起飞		航班号	3011	1021	3012	1022	3013	1023	3014
		起飞时间	5	7	9	10	13	17	18
航班号	到达时间								
1011	8：00		21	23	25	2	5	9	10
3021	9：00		20	22	24	25	4	8	9
3022	13：00		16	18	20	21	24	4	5
1012	14：00		15	17	19	20	23	3	4
3023	17：00		12	14	16	17	20	24	23
1013	20：00		9	11	13	14	17	21	22
3024	21：00		8	10	12	13	16	20	21

广州

停留时间/小时 到达 \ 起飞		航班号	3021	3022	2021	3023	2022	3024
		起飞时间	6	10	14	14	17	18
航班号	到达时间							
3011	8：00		22	2	6	6	9	10
2011	10：00		18	24	4	4	7	8
2012	12：00		18	22	2	2	5	6
3012	12：00		18	22	2	2	5	6
3013	16：00		14	18	22	22	25	2
3014	21：00		9	13	17	17	20	21

课堂练习5

三个城市航班停留费用

兰州

到达 \ 起飞	1011	2011	2012	1012	1013
1021	441a	484a	576a	9a	81a
1022	324a	361a	441a	576a	36a
2021	169a	196a	256a	361a	625a
1023	121a	144a	196a	289a	529a
2022	100a	121a	169a	256a	484a

北京

到达 \ 起飞	3011	1021	3012	1022	3013	1023	3014
1011	441a	529a	625a	4a	25a	81a	100a
3021	400a	484a	576a	625a	16a	64a	81a
3022	256a	324a	400a	441a	576a	16a	25a
1012	225a	289a	361a	400a	529a	9a	16a
3023	144a	196a	256a	289a	400a	576a	529a
1013	81a	121a	169a	196a	289a	441a	484a
3024	64a	100a	144a	169a	256a	400a	441a

广州

到达 \ 起飞	3021	3022	2021	3023	2022	3024
3011	484a	4a	36a	36a	81a	100a
2011	324a	576a	16a	16a	49a	64a
2012	324a	484a	4a	4a	25a	36a
3012	324a	484a	4a	4a	25a	36a
3013	196a	324a	484a	484a	625a	4a
3014	81a	169a	289a	289a	400a	441a

课堂练习5

效率表—指派模型

兰州

到达 \ 起飞	1011	2011	2012	1012	1013	起飞
1021	441	484	576	9	81	1
1022	324	361	441	576	36	1
2021	169	196	256	361	625	1
1023	121	144	196	289	529	1
2022	100	121	169	256	484	1
到达	1	1	1	1	1	

北京

到达 \ 起飞	3011	1021	3012	1022	3013	1023	3014	起飞
1011	441	529	625	4	25	81	100	1
3021	400	484	576	625	16	64	81	1
3022	256	324	400	441	576	16	25	1
1012	225	289	361	400	529	9	16	1
3023	144	196	256	289	400	576	529	1
1013	81	121	169	196	289	441	484	1
3024	64	100	144	169	256	400	441	1
到达	1	1	1	1	1	1	1	

广州

到达 \ 起飞	3021	3022	2021	3023	2022	3024	起飞
3011	484	4	36	36	81	100	1
2011	324	576	16	16	49	64	1
2012	324	484	4	4	25	36	1
3012	324	484	4	4	25	36	1
3013	196	324	484	484	625	4	1
3014	81	169	289	289	400	441	1
到达	1	1	1	1	1	1	

课堂练习5

最优排班方案

最低费用

兰州 — 527a

到达＼起飞	1011	2011	2012	1012	1013	起飞
1021	-	-	-	1	-	1
1022	-	-	-	-	1	1
2021	1	-	-	-	-	1
1023	-	1	-	-	-	1
2022	-	-	1	-	-	1
到达	1	1	1	1	1	

北京 — 461a

到达＼起飞	3011	1021	3012	1022	3013	1023	3014	起飞
1011	-	-	-	1	-	-	-	1
3021	-	-	-	-	1	-	-	1
3022	-	-	-	-	-	1	-	1
1012	-	-	-	-	-	-	1	1
3023	1	-	-	-	-	-	-	1
1013	-	1	-	-	-	-	-	1
3024	-	-	1	-	-	-	-	1
到达	1	1	1	1	1	1	1	

广州 — 134a

到达＼起飞	3021	3022	2021	3023	2022	3024	起飞
3011	-	1	-	-	-	-	1
2011	-	-	-	1	-	-	1
2012	-	-	-	-	1	-	1
3012	-	-	1	-	-	-	1
3013	-	-	-	-	-	1	1
3014	1	-	-	-	-	-	1
到达	1	1	1	1	1	1	

连续投资问题

例5.4 某公司拥有现金10万元，今后五年考虑给下列项目投资：

项目A：从第一年到第四年每年年初需要投资，并于次年末回收本利115%，但要求第一年要么不投资，要么投资最低金额为4万元，第二、三、四年不限。

项目B：第三年初需要投资，到第五年末能回收本利128%，但规定要么不投资，要么最低投资金额为3万元，最高金额为5万元。

项目C：第二年初需要投资，到第五年末能回收本利140%，但规定要么不投资，要么其投资额或为2万元或为4万元，或为6万元或为8万元。

项目D：五年内每年初可购买公债，于当年末归还，加利息6%，此项投资金额不限。

问应如何确定这些项目的每年投资额，使到第五年末拥有的本利总额最大？

连续投资问题

一、确定决策变量

按不同的项目设决策变量

（1）项目A，第5年不能投资，前4年每年都可能投资，分别设投资额为x_1，x_2，x_3，x_4，并且第一年要么投4万元以上，要么不投资，所以设y_1。

$$y_1 = \begin{cases} 1 & \text{当第1年给A项目投资时} \\ 0 & \text{当第1年不给A项目投资时} \end{cases}$$

连续投资问题

（2）项目B，只有第三年投资，设投资额为x_5，并且要么大于3万，要么小于5万。所以同时设

$$y_2 = \begin{cases} 1 & \text{当第3年给B项目投资时} \\ 0 & \text{当第3年不给B项目投资时} \end{cases}$$

连续投资问题

（3）项目C，要么不投资，要么投2，4，6，8万元，所以设投资额为x_6，同时设y_3是个非负整数变量，并规定

$$y_3=\begin{cases}4 & \text{当第2年投资C项目8万元时}\\ 3 & \text{当第2年投资C项目6万元时}\\ 2 & \text{当第2年投资C项目4万元时}\\ 1 & \text{当第2年投资C项目2万元时}\\ 0 & \text{当第2年不投资C项目投资时}\end{cases}$$

（4）项目D，每年都可以投资，设投资额x_7，x_8，x_9，x_{10}，x_{11}

连续投资问题

根据上面的分析，变量的设置情况如下表所示：

年份 投资变量 项目	1	2	3	4	5	本利
A	x_1	x_2	x_3	x_4		1.15
	y_1					
B			x_5			1.28
			y_2			
C		x_6				1.40
		y_3				
D	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	1.06

连续投资问题

二、确定目标函数

本问题的目标是5年末拥有的资金本利总额为最大。而5 年末资金本利总额可用下式表示：

$$z=1.15\,x_4+1.28\,x_5+1.40\,x_6+1.06\,x_{11}$$

三、确定约束条件

本问题的约束条件取决于每年具体投资的情况，其关键点是将每年年初持有的资金全部投出，以取得最大的收益。因此需要清楚每年年初的实际持有资金额。如下表：

年份 / 投资额 / 项目	1	2	3	4	5	本利
A	x_1	x_2	x_3	x_4		1.15
	y_1					
B			x_5			1.28
			y_2			
C		x_6				1.40
		y_3				
D	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	1.06
每年初持有资金额（万元）	10	$1.06x_7$	$1.15x_1+1.06x_8$	$1.15x_2+1.06x_9$	$1.15x_3+1.06x_{10}$	

连续投资问题

由此表可得每年初的可投资金额：

第一年：$x_1 + x_7=10$ （部门现有资金）

$x_1 \geq 4\, y_1$ （要么不投资A项目，要么投入4万元以上）

$x_1 \leq 10\, y_1$ （第一年投资最大额度不会超过10万元）

第二年：$x_2 + x_6 + x_8=1.06\, x_7$ （第二年初的现有资金）

$x_6=2\, y_3$ （要么不投资C项目，要么投入2，4，6，8万元）

$y_3 \leq 4$

第三年：$x_3 + x_5 + x_9=1.15\, x_1+1.06\, x_8$ （第三年初的现有资金）

$x_5 \leq 5\, y_2$ （要么不投资B项目，要么投入不超过5万元）

$x_5 \geq 3\, y_2$ （要么不投资B项目，要么投入不少于3万元）

第四年：$x_4 + x_{10}=1.15\, x_2+1.06\, x_9$ （第四年初的现有资金）

第五年：$x_{11}=1.15\, x_3+1.06\, x_{10}$ （第五年初的现有资金）

得混合整数规划模型

$$\max \quad z=1.15x_4+1.28x_5+1.40x_6+1.06x_{11}$$

s.t.

$$x_1+x_7=10$$
$$x_2+x_6-1.06x_7+x_8=0$$
$$-1.15x_1+x_3+x_5-1.06x_8+x_9=0$$
$$-1.15x_2+x_4-1.06x_9+x_{10}=0$$
$$-1.15x_3-1.06x_{10}+x_{11}=0$$
$$x_1-4y_1\geq 0$$
$$x_1-10y_1\leq 0$$
$$x_5-5y_2\leq 0$$
$$x_5-3y_2\geq 0$$
$$x_6-2y_3=0$$
$$y_3\leq 4$$

$x_i\geq 0$, (i=1, 2, ..., 11); y_1, y_2 为0-1变量; y_3 为非负整数.

模型求解

连续投资问题

求解结果：

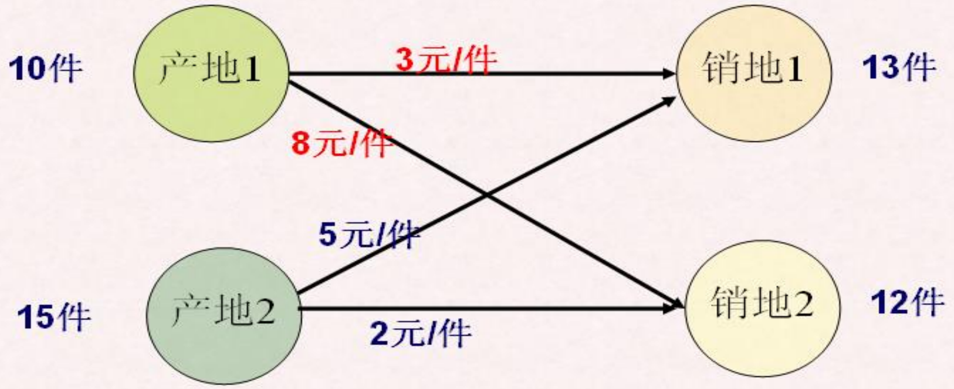
投资 年份 结果 项目	1	2	3	4	5
A	x_1=4.339623	x_2=0	x_3=0	x_4=0	
	y_1=1				
B			x_5=4.990566		
			y_2=1		
C		x_6=6			
		y_3=3			
D	x_7=5.660377	x_8=0	x_9=0	x_{10}=0	x_{11}=0

五年末总的最高收益值：14.78792

问题讨论

一企业有两个工厂（生产同种电器产品）和两个分销点（销售同种产品），两工厂的产量、两分销点的销量及各厂到销点的单位运费如下表，试做出总运费最低的调运方案。

	B_1	B_2	总产量（件）
A_1	3	8	10
A_2	5	2	15
总销量（件）	13	12	



本章小结

重点内容：

1. 整数规划与一般线性规划的区别
2. 整数规划模型的构建过程
3. 几种整数规划模型的应用

THE END， Thanks！