兰州大学 管理学院
School of Management ,Lanzhou University

第八讲　网络优化模型

宗胜亮

zongshl@lzu.edu.cn

Data
Models & Decisions

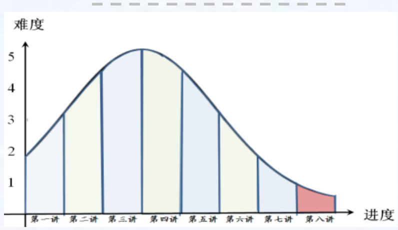
课程知识结构导航

纵横运筹学

理论分析

数据、模型、决策

- 不确定型决策
- 风险型决策
- 确定型决策



运筹学基础模型

原理、方法与操作

最大最小准则
最大最大准则
等可能性准则
乐观系数准则
后悔值准则

期望值准则
全情报价值准则
样本情报价值准则
效用值准则

线性规划模型
线性规划模型拓展
动态规划
排队论
存储论
…………

运筹学模型的应用拓展

原理、方法与操作

LP灵敏度分析
线性规划应用
整数规划模型
运输问题模型
目标规划模型
网络优化模型

价值系数变化影响
常数项变化影响
百分之一百法则
相差值分析

生产安排问题
排班问题
套裁下料问题
连续投资问题

纯整数规划模型
0-1整数规划模型
混合整数规划模型
整数规划的特殊应用

产销平衡运输模型
产大于销运输模型
销大于产运输模型
条件产销不平衡模型
转运问题模型

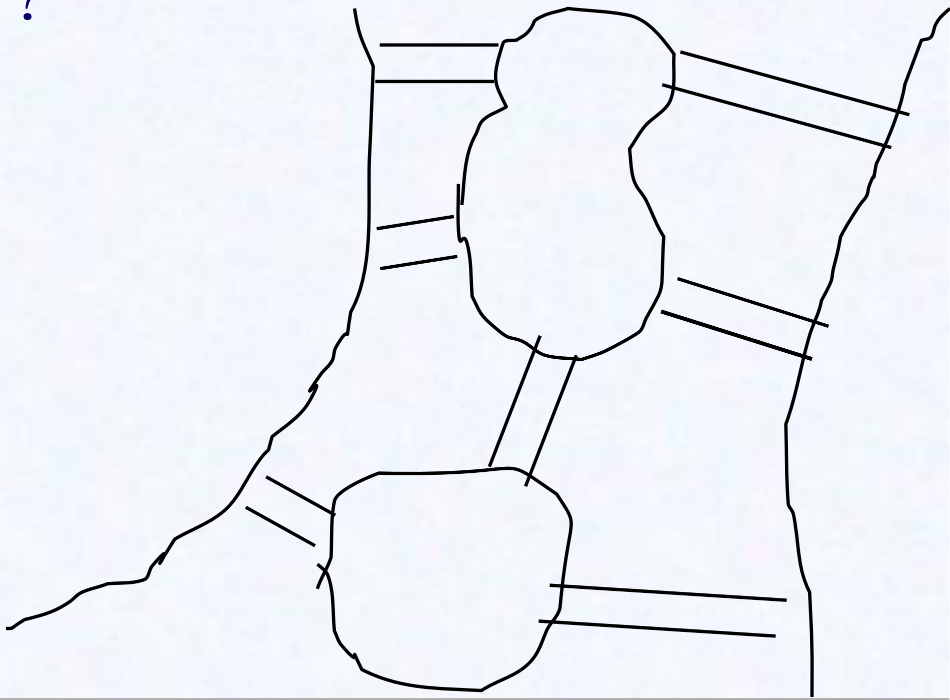
有优先级目标规划
加权目标规划

最短路模型
最小费用流模型
最大流模型
最小支撑树模型

前导案例

七桥问题

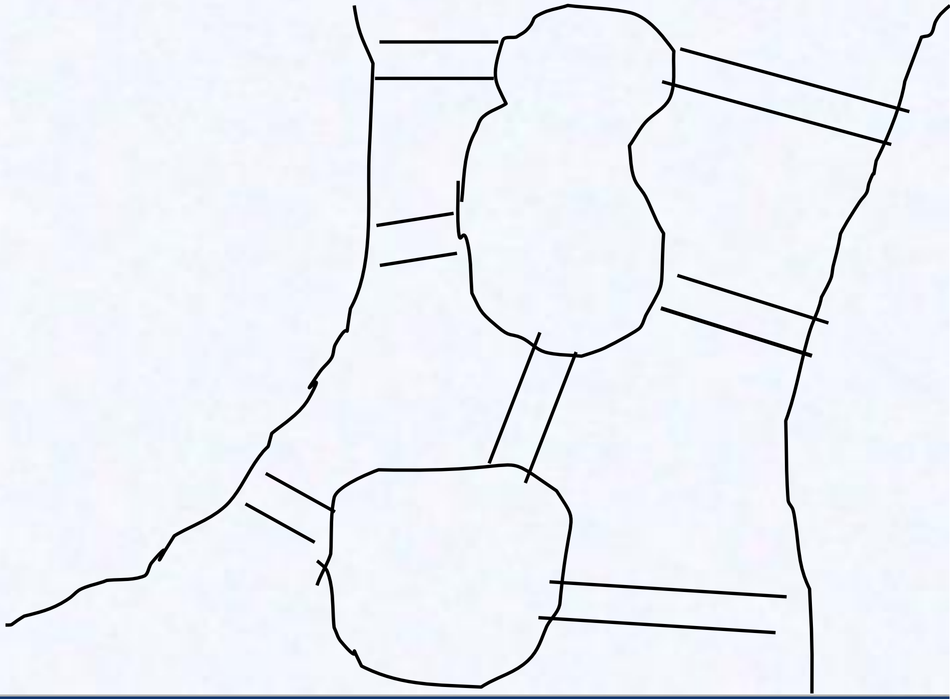
18世纪时风景秀丽的小城哥尼斯堡中有一条河，河的中间有两个小岛，河的两岸与两岛之间共建有七座桥（如图），当时小城的居民中流传着一道难题：一个人能否不重复地走过所有七座桥，再回到出发点？



前导案例

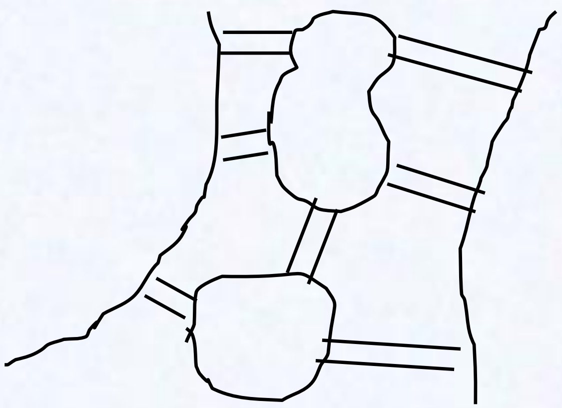
这个问题后来变得有点惊心动魄：说是有一队工兵，因战略上的需要，奉命要炸掉这七座桥。命令要求当载着炸药的卡车驶过某座桥时，就得炸毁这座桥，不许遗漏一座！

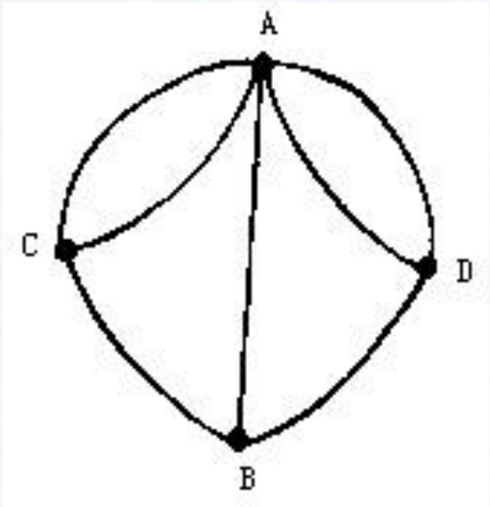
可能路线：$P_7^7=5040$



前导案例

数学家欧拉知道了七桥问题后，他用四个点A、B、C、D分别表示小岛和岸，用七条线段表示七座桥（如图），于是问题就成了如何“一笔画”画出图中的图形？





点A、B表示岛
点C、D表示岸
线表示桥

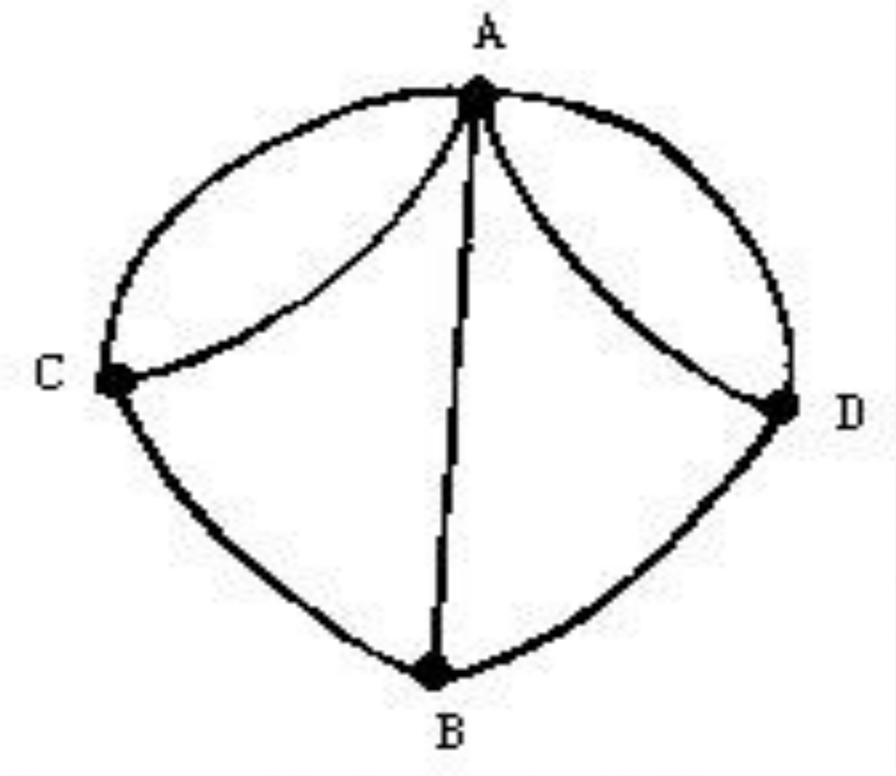
前导案例

欧拉发现：

- 可以一笔画成的图形，与偶点个数无关，与奇点个数有关。也就是说，凡是图形中没有奇点的（奇点个数为0），可选任一个点做起点，且一笔画后可以回到出发点。
- 若奇点个数为2，可选其中一个奇点做起点，而终点一定是另一个奇点，即一笔画后不可以回到出发点。
- 凡是图形中有2个以上奇点的，不能完成一笔画。

用你发现的规律，说一说七桥问题的答案？

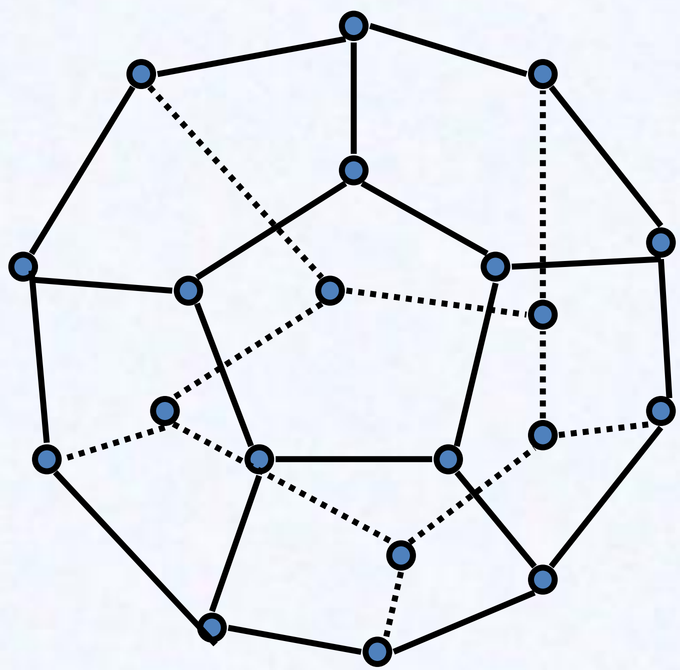
前导案例



由于七桥问题中的四个点都是奇点，因此可以判断它是无法一笔画出来的，也就是说根本不存在能不重复走遍七座桥的路线！

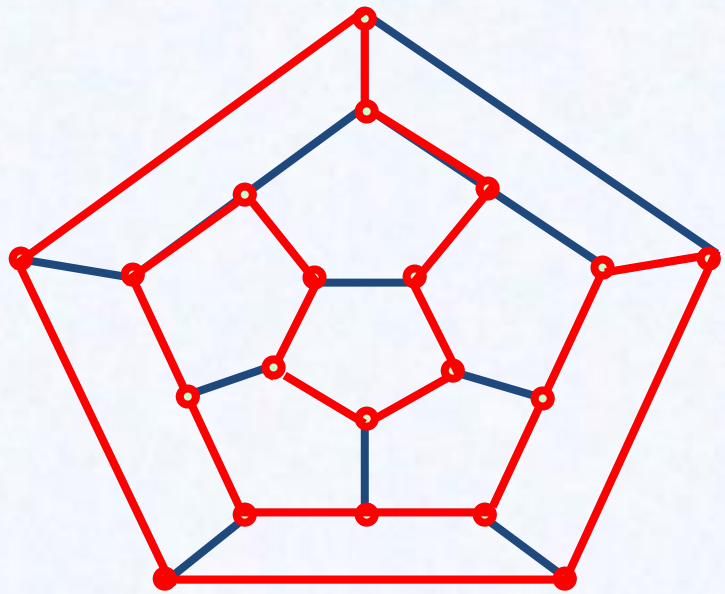
哈密顿圈（环球旅行游戏）

十二面体的20个顶点代表世界上20个城市，能否从某个城市出发在十二面体上依次经过每个城市恰好一次最后回到出发点？



前导案例

哈密顿圈（环球旅行游戏）



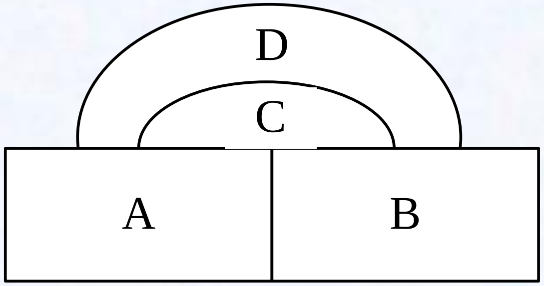
前导案例

四色问题

对任何一张地图进行着色，两个共同边界的国家染不同的颜色，则只需要四种颜色就够了。

德·摩尔根致哈密顿的信（1852年10月23日）

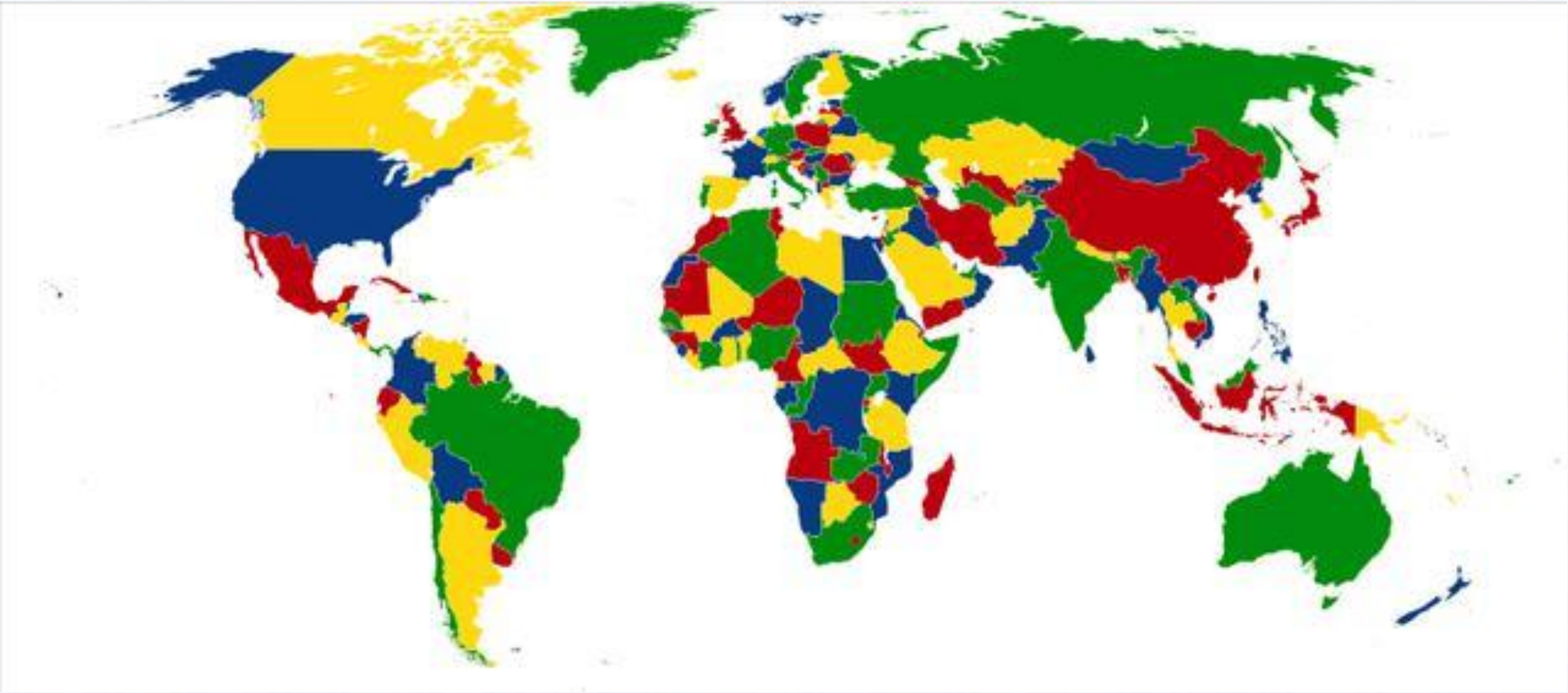
我的一位学生今天请我解释一个我过去不知道，现在仍不甚了解的事实。他说如果任意划分一个图形并给各部分着上颜色，使任何具有公共边界的部分颜色不同，那么需要且仅需要四种颜色就够了，如右图所示。



A、B、C、D为四种颜色名称

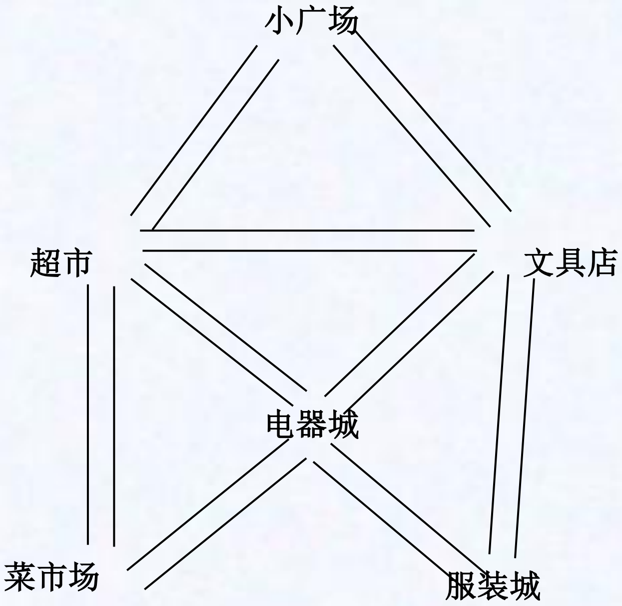
前导案例

四色问题



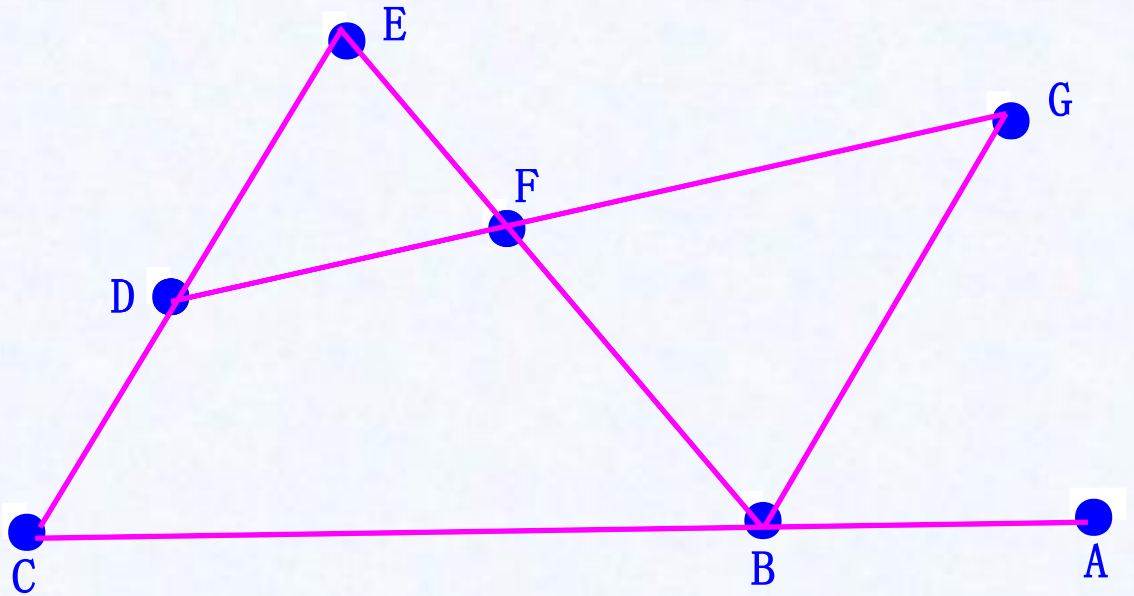
前导案例

一辆洒水车要给某城市的街道洒水，街道地图如下。你能否设计一条洒水车洒水的路线，使洒水车不重复地走过所有的街道，再回到出发点？



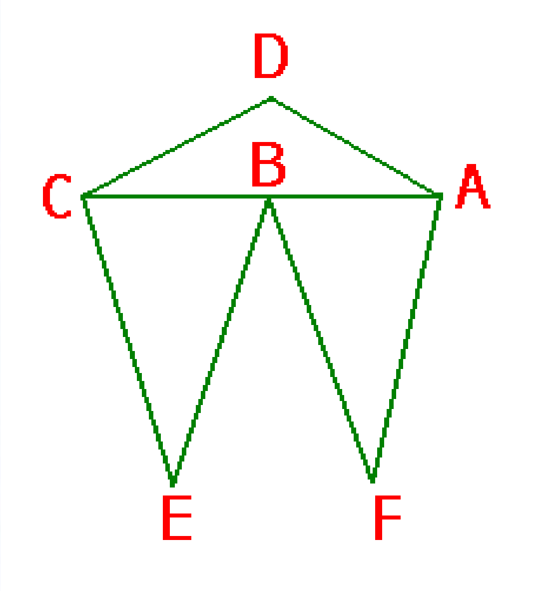
前导案例

下图是一个公园的平面图，能不能使游人走遍每一条路不重复？入口和出口又应设在哪儿？



前导案例

甲乙两个快递员去派件，两人同时出发以同样的速度走遍所有的街道，甲从A点出发，乙从B点出发，最后都回到快递分拣处（C点）。如果要选择最短的线路，谁先回到快递分拣处？

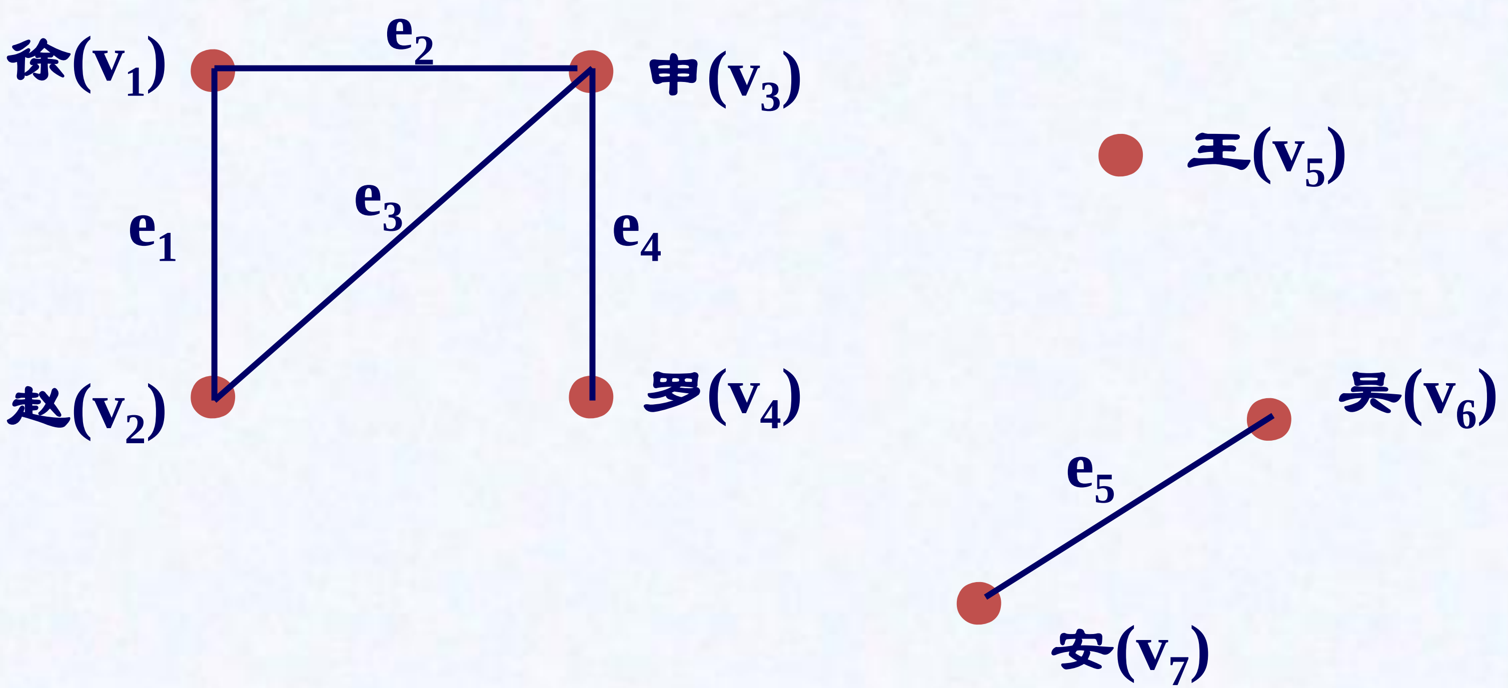


内容提要

- 基本概念
- 最短路模型
- 最小费用流模型
- 最大流模型
- 最小费用最大流模型
- 最小支撑树模型

图------网络的八个基本概念

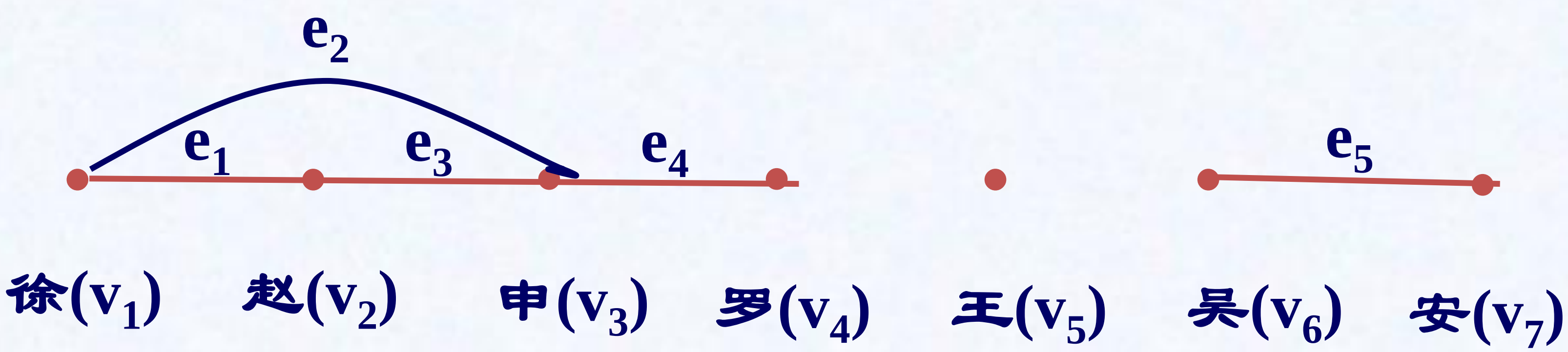
1、点和边



人群中相互认识关系图-------无向图

基本概念

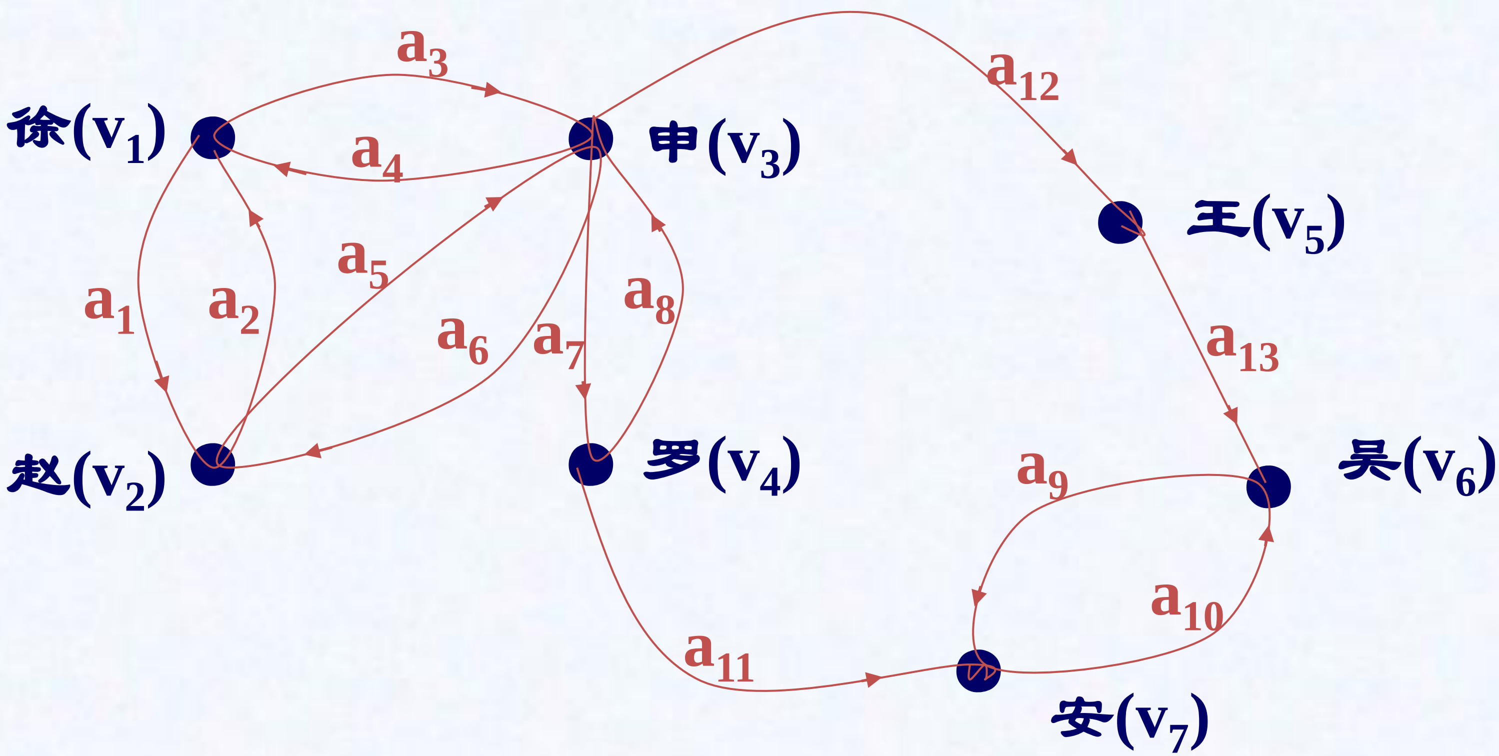
1、点和边



人群中相互认识关系图-------无向图（另一种表述形式）

基本概念

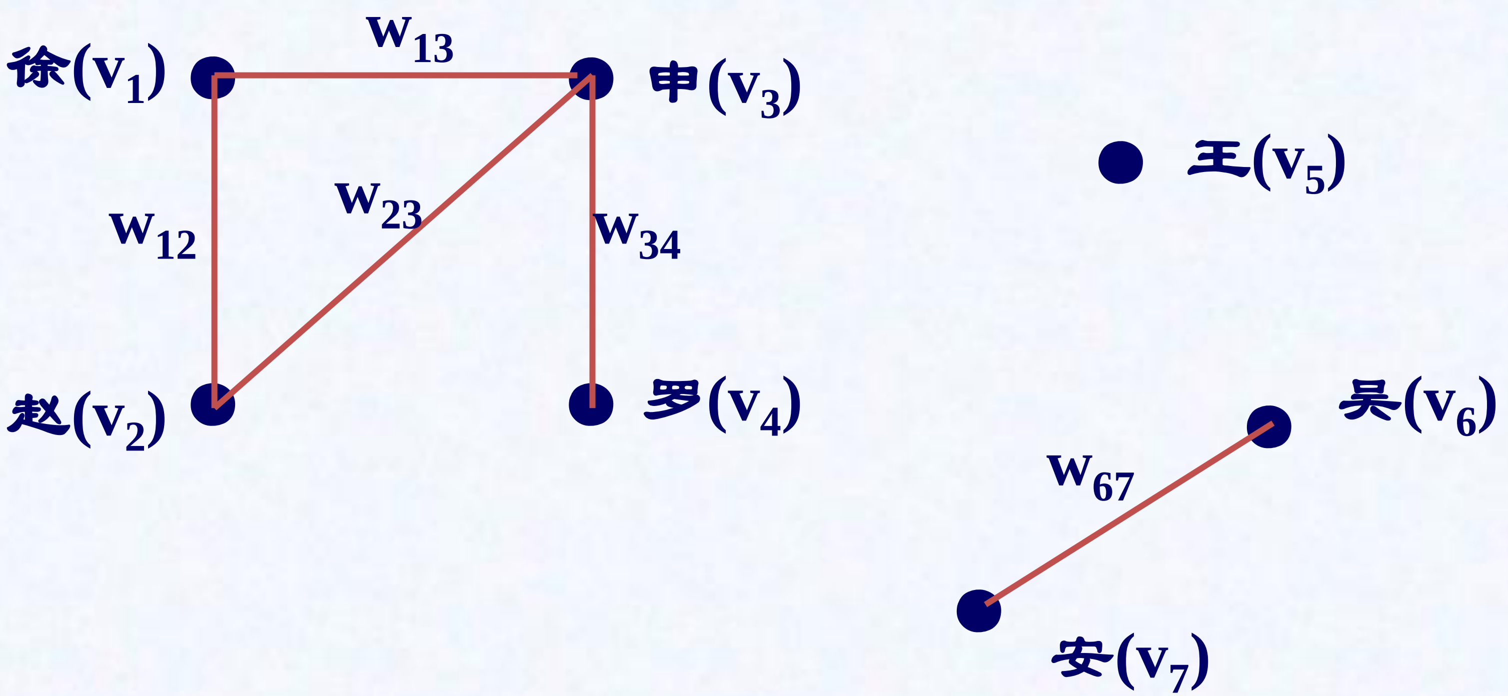
2、弧



人群中相互认识关系图-------有向图

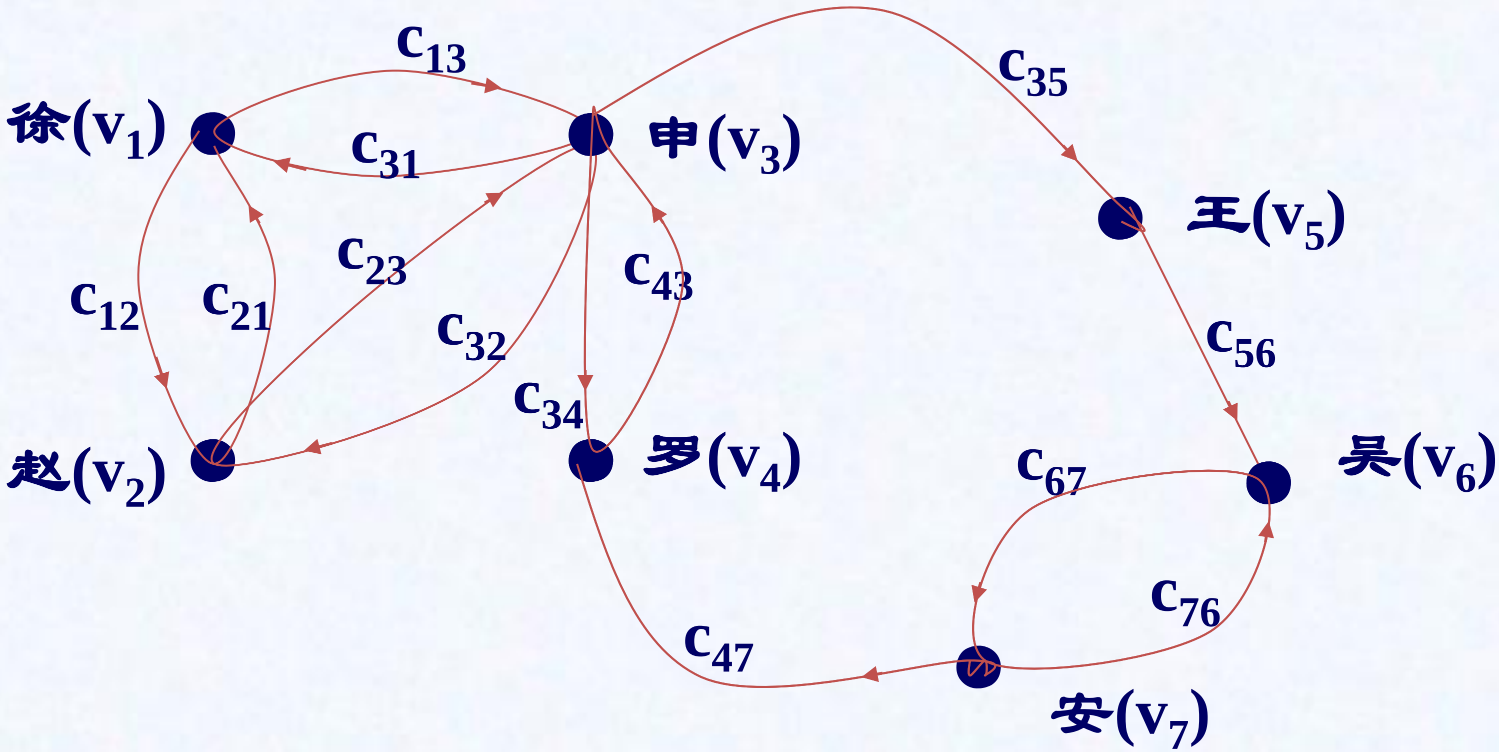
基本概念

3、赋权图



人群中相互认识关系图———————无向赋权图

3、赋权图



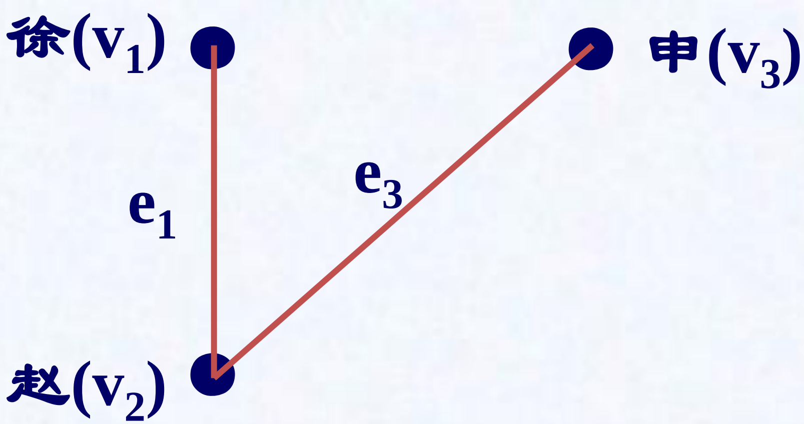
人群中相互认识关系图———————有向赋权图

基本概念

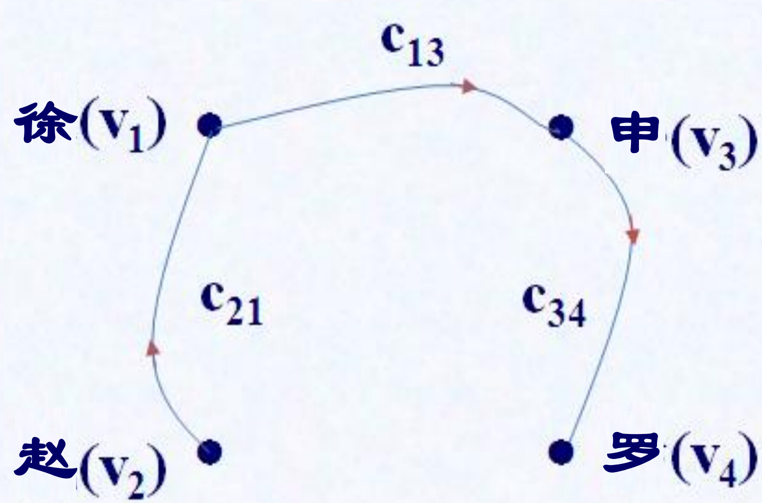
4、链和路

在无向图中，点和边的交替序列，称之为链；在有向图中，点和弧的交替序列，但点和弧均不重复，则称之为路。

无向图中的链和路相同。



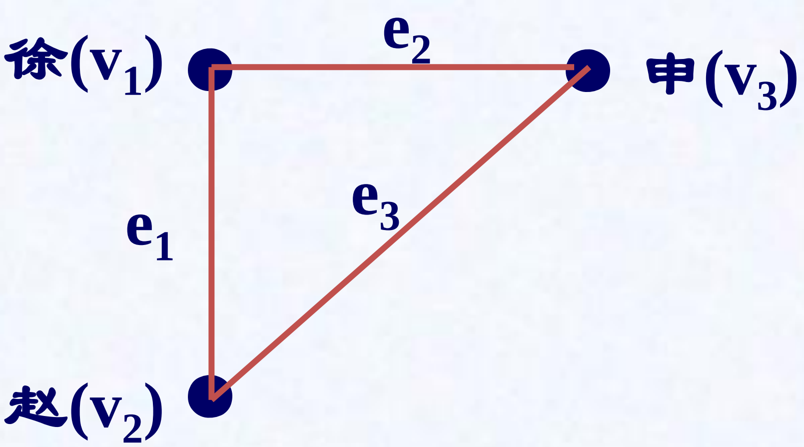
链



路

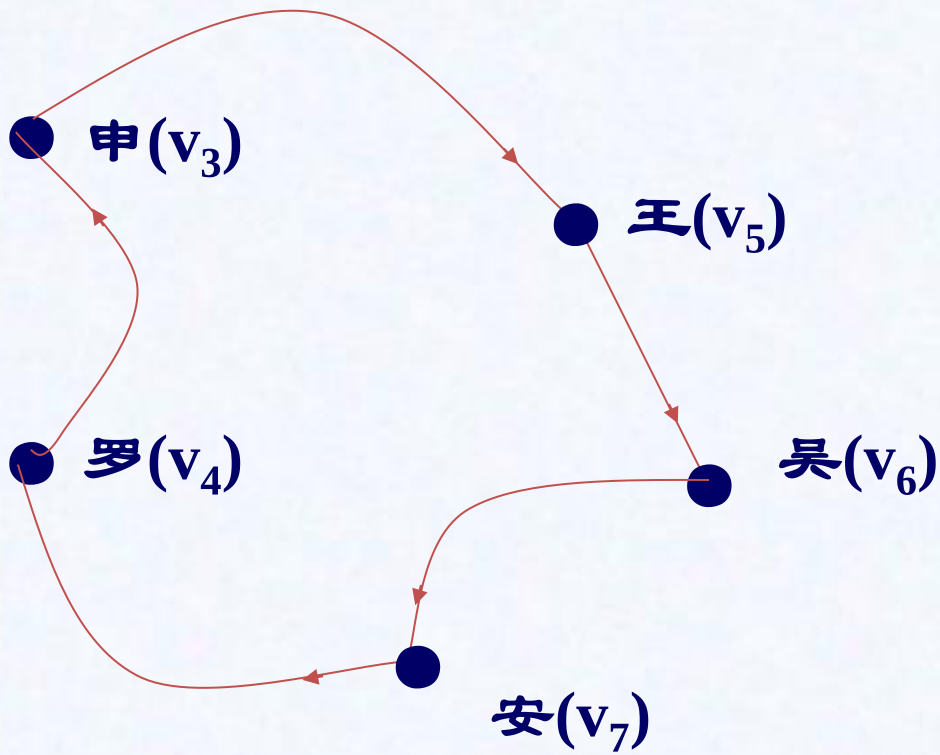
5、圈

在无向图中，始点和终点重合的链就是一个圈。上图中（v_1，v_2，v_3，v_1）就是一个圈。



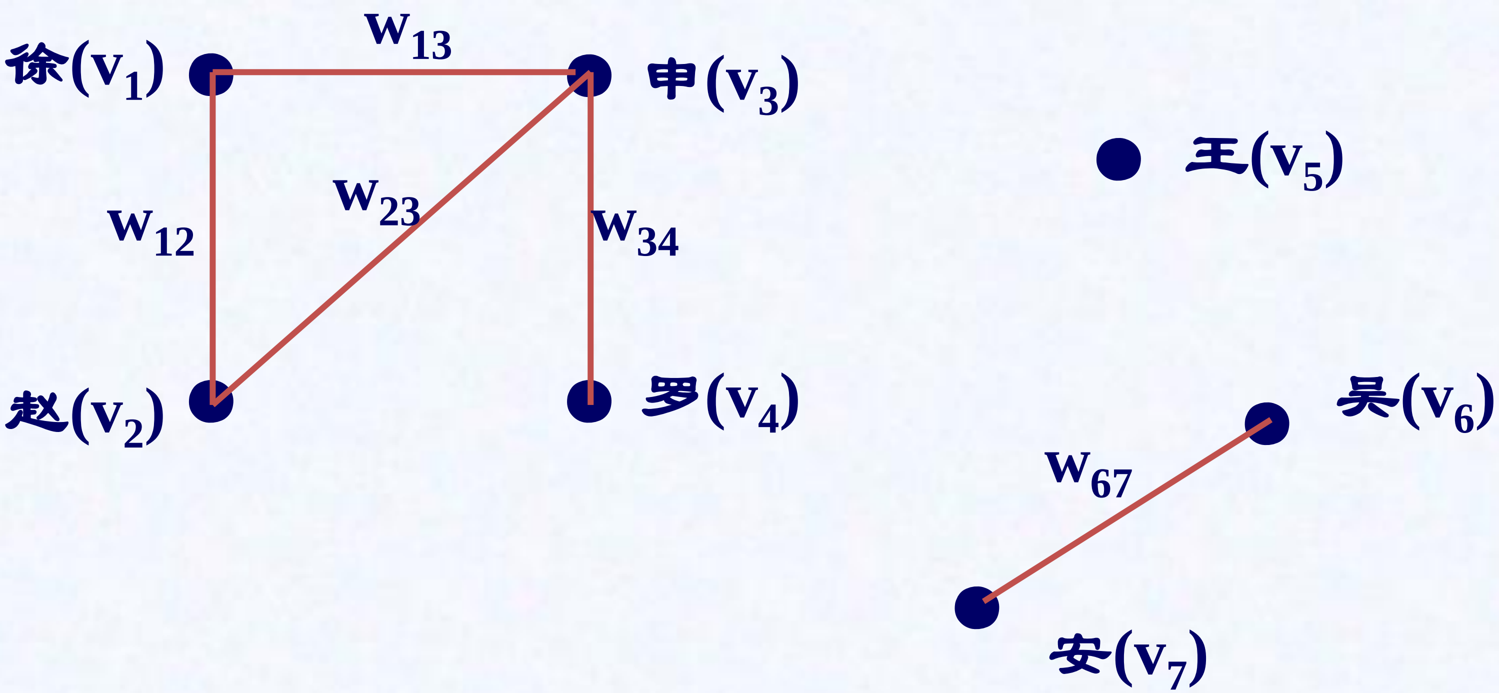
6、 回路

始点和终点重合的路叫做回路。上图中（v_3，v_5，v_6，v_7，v_4 ，v_3）就是一条回路。



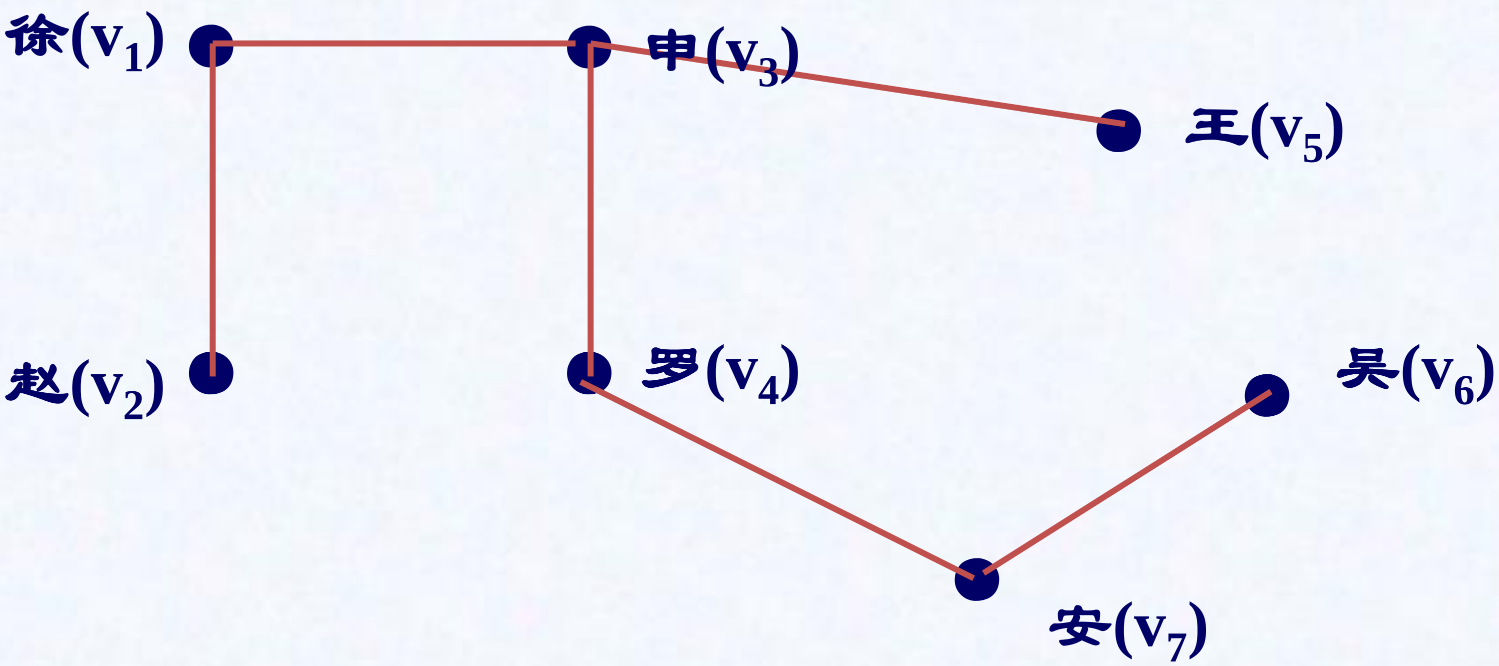
7、连通图

若一个图中，任意两点之间至少存在一条链，称这样的图为连通图。下图就是一个非连通图。



8、树

树就是无圈的连通图



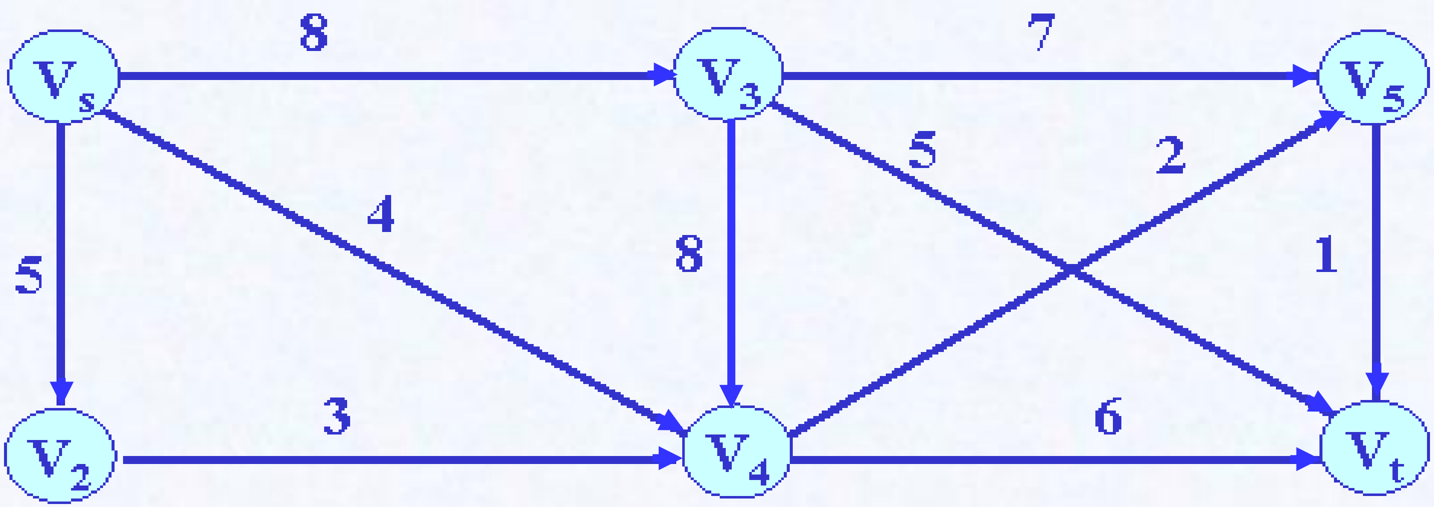
基本概念

在赋权的有向图中指定了一点，称为发点（或称为源，记为v_s），指定另一点为收点（或称为汇，记为v_t），其余的点称为中间点，并把图中的每一条弧的赋权数c_{ij}称之为弧（v_i，v_j）的容量，这样赋权的有向图就称之为网络。

网络最优化问题就是基于这样的网络，建立相应的网络模型，求最大值或最小值。

基本概念

网络最优化问题的主要特征：



可研究的问题：

1、最短路问题

2、最小费用流问题

3、最大流问题

4、最小费用最大流问题

5、最小支撑树问题

最短路模型

最短路模型要解决的问题：对一有向或无向的赋权图中，指定发点V_s和收点V_t之间的最短路。目标是使通过网络找到一条路，使两点间的总距离为最短。

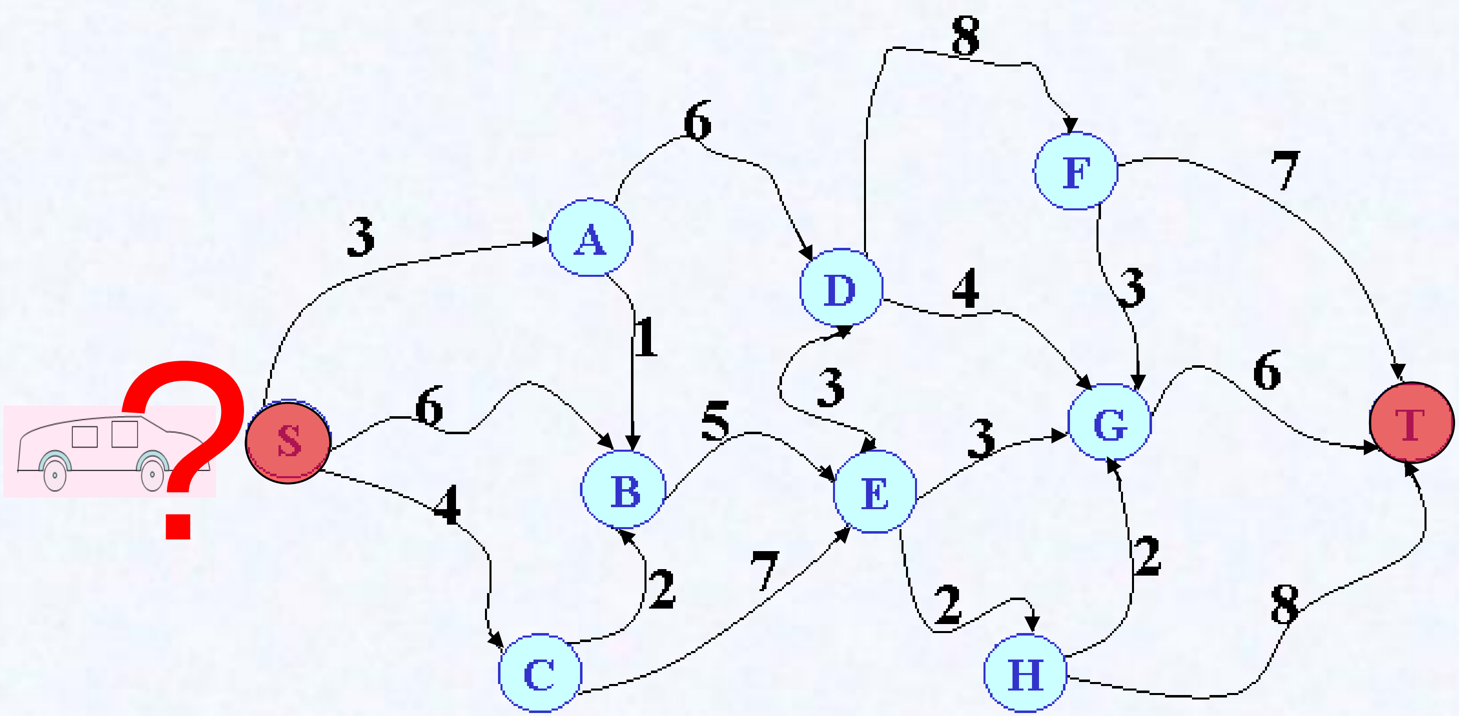
最短路模型

最短路模型的特征：

- 在网络中选择一条路，始于发点（源点），终于收点（目的地）
- 连接两个节点的连线叫做边（允许向任一个方向行进）或弧（只允许沿着一个方向行进）
- 每条边（弧）都有一个相关的非负权数，表示该边（弧）所示的路长
- 目标是寻找从发点到收点的最短路（总长度最小的路）

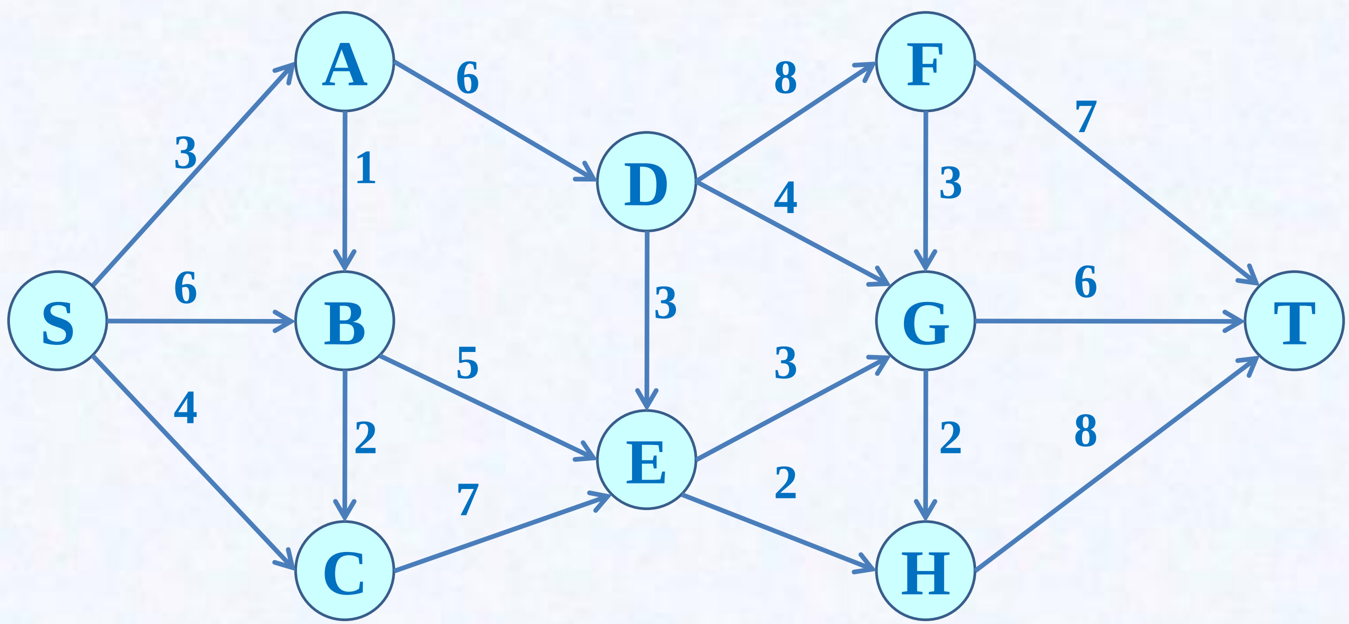
最短路模型

例8.1 如下图所示，某人每天从住处S开车到工作地T上班，图中各弧旁的数字表示道路的长度（千米）。试问他从家出发到工作地，**应选择哪条路线，才能使路上行驶的总距离最短？**



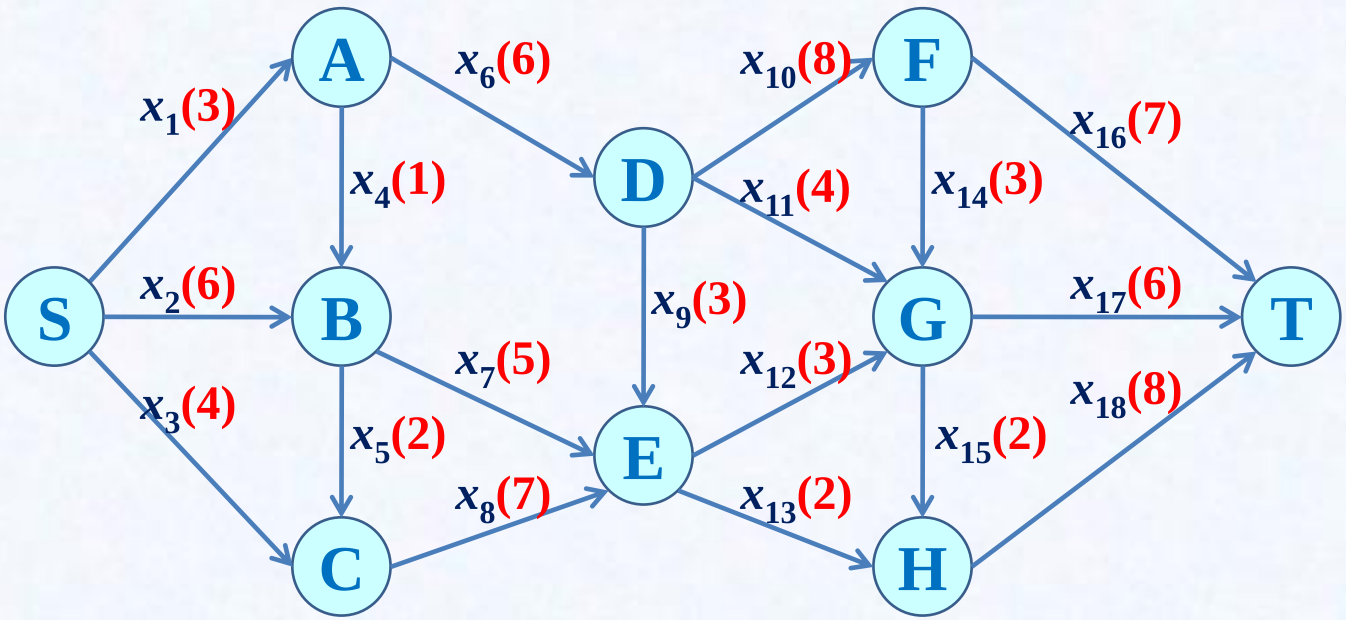
最短路模型的求解

例8.1 每两个节点的路线都可以视为有向的，可以将其改画为如下的示意图（将各条边都改为直线段）



最短路模型

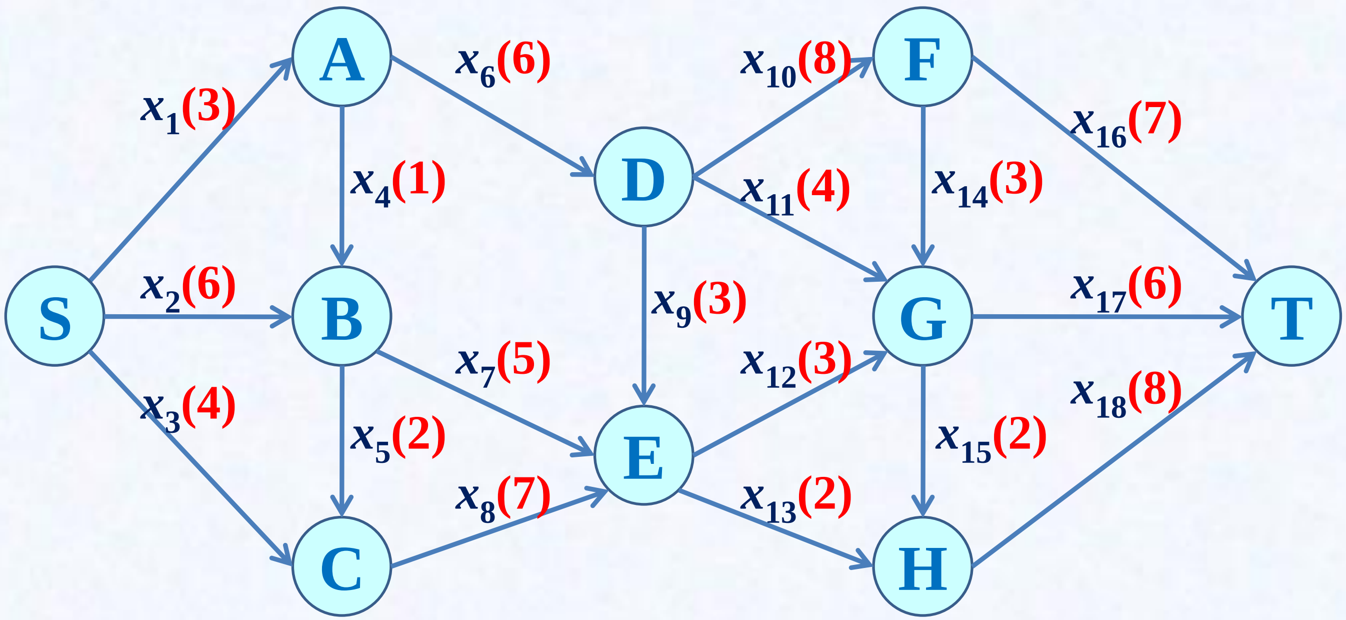
求解最短路问题实际上就是找一条总长度最短的路线，对于这样的最短路问题，可以建立0-1整数规划数学模型求解（如下图）。



决策变量设置

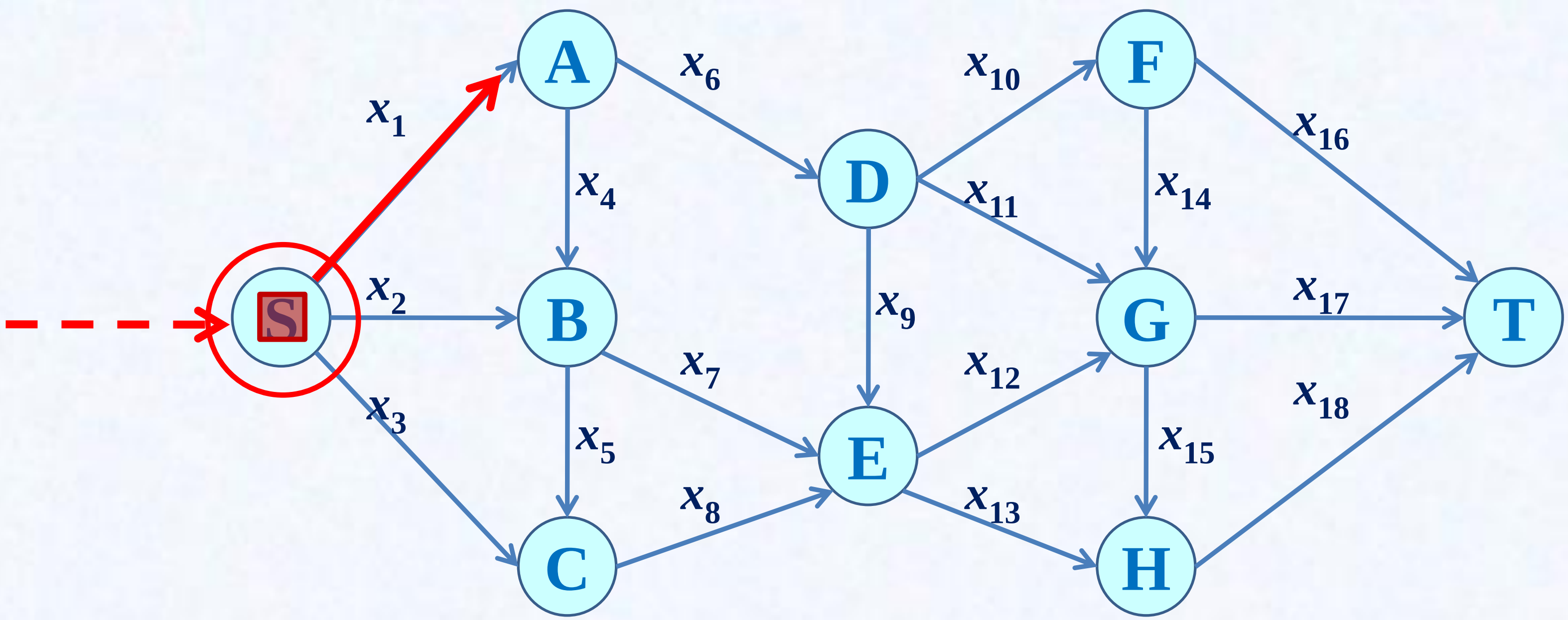
最短路模型

目标函数：累计的总路程为最短



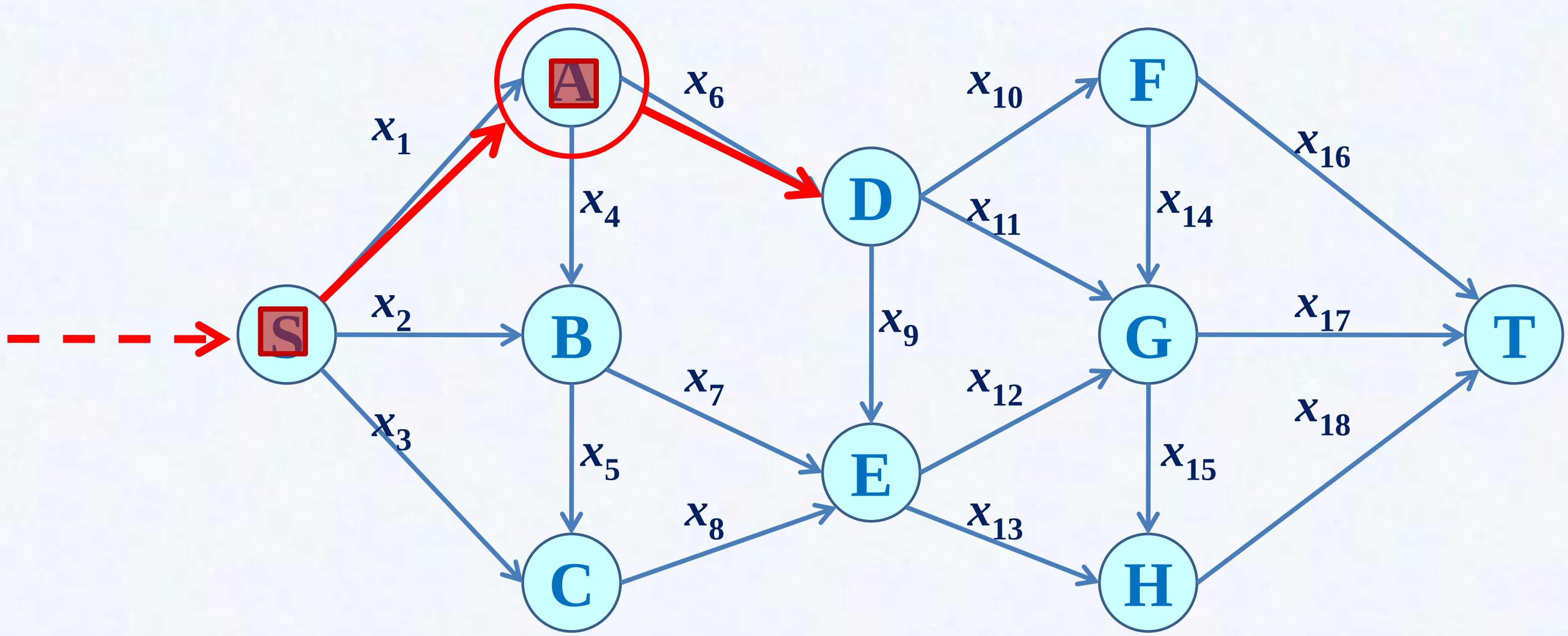
$$\min \ f = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 6x_6 + 5x_7 + 7x_8 + 3x_9 + 8x_{10} + 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 2x_{15} + 7x_{16} + 6x_{17} + 8x_{18}$$

约束条件1: 发点净出量为1



净流出量: $x_1+x_2+x_3=1$

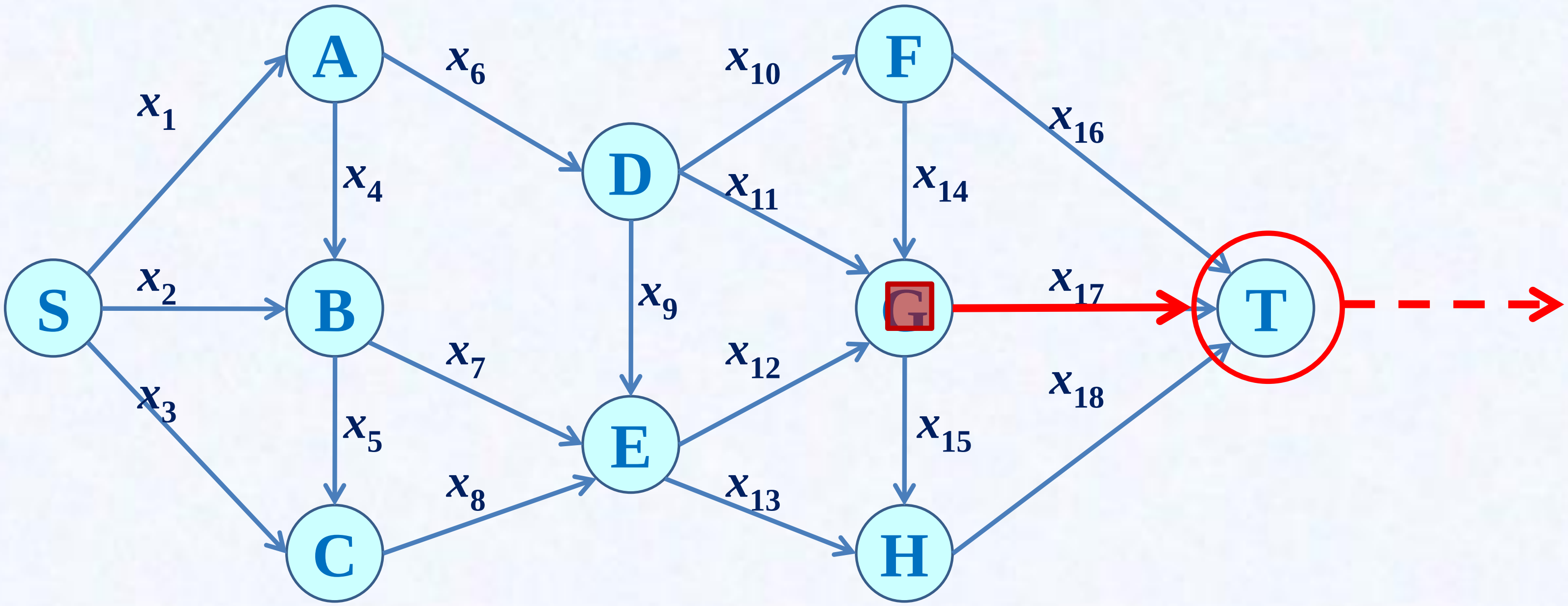
约束条件1：中间点净出量为0



净流出量： $-x_1+x_6+x_4=0$

最短路模型

约束条件1: 收点净出量为-1



净流出量: $-x_{16} - x_{17} - x_{18} = -1 \Rightarrow x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1$

最短路模型

即0-1整数规划数学模型为：

$$\min\ f=3x_1+6x_2+4x_3+x_4+2x_5+6x_6+5x_7+7x_8+3x_9+8x_{10}+4x_{11}$$
$$+3x_{12}+2x_{13}+3x_{14}+2x_{15}+7x_{16}+6x_{17}+8x_{18}$$

s.t.
$$x_1+x_2+x_3=1$$
$$-x_1+x_6+x_4=0$$
$$-x_2-x_4+x_5+x_7=0$$
$$-x_3-x_5+x_8=0$$
$$-x_6+x_9+x_{10}+x_{11}=0$$
$$-x_7-x_8-x_9+x_{12}+x_{13}=0$$
$$-x_{10}+x_{14}+x_{16}=0$$
$$-x_{11}-x_{12}-x_{14}+x_{15}+x_{17}=0$$
$$-x_{13}-x_{15}+x_{18}=0$$
$$x_{16}+x_{17}+x_{18}=1$$
$$x_i\geq 0\quad (i=1,2\ldots.18)$$

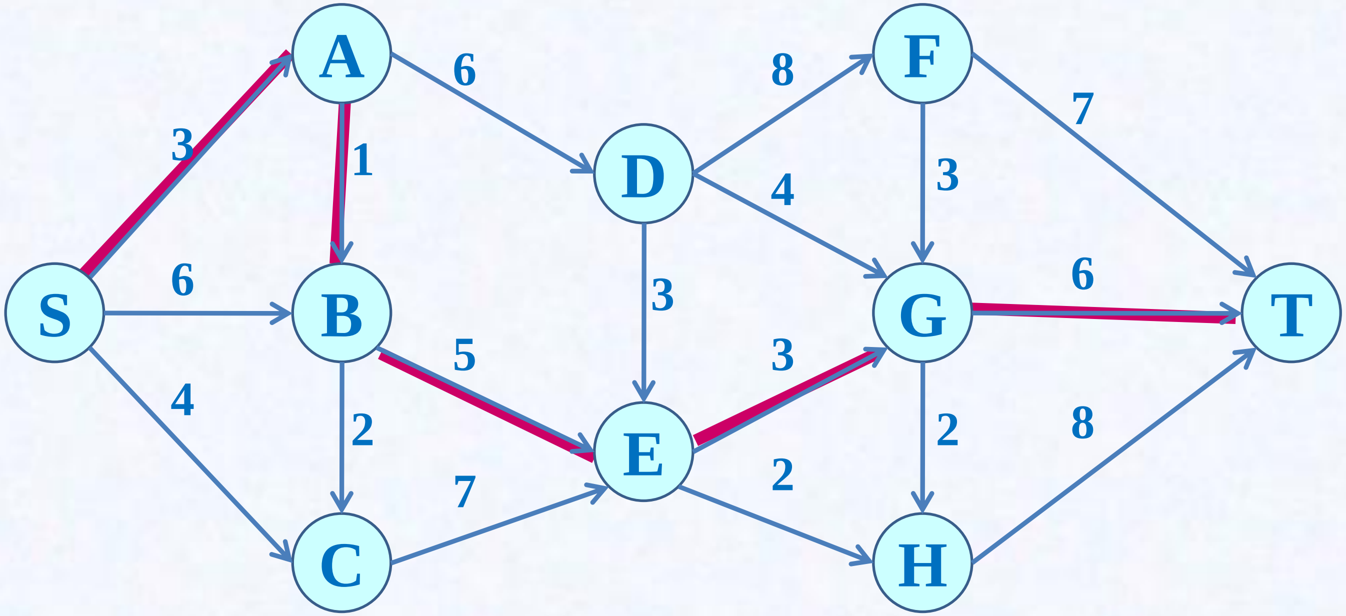
模型求解

最短路模型

其结果为：x_1、x_4、x_7、x_{12}、x_{17}为1，其余变量都为0。

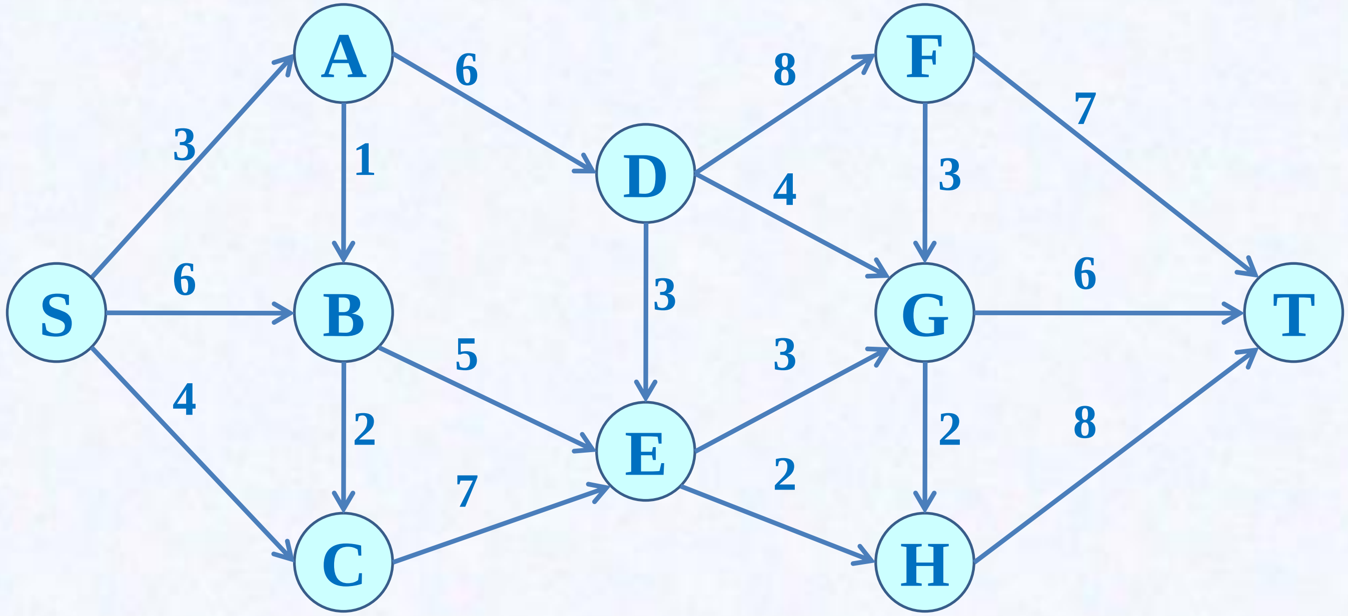
即路径为：S→A→B→E→G→T

最短路径为：18（千米）。



最短路模型

为简化求解过程，可以建立专门的最短路求解模型，用计算机求解：可以将图中各条边和每条边的权数直接录入到求解模型中，直接得到结果。因此可以称下图就是一个**最短路问题的数学表述模型**。

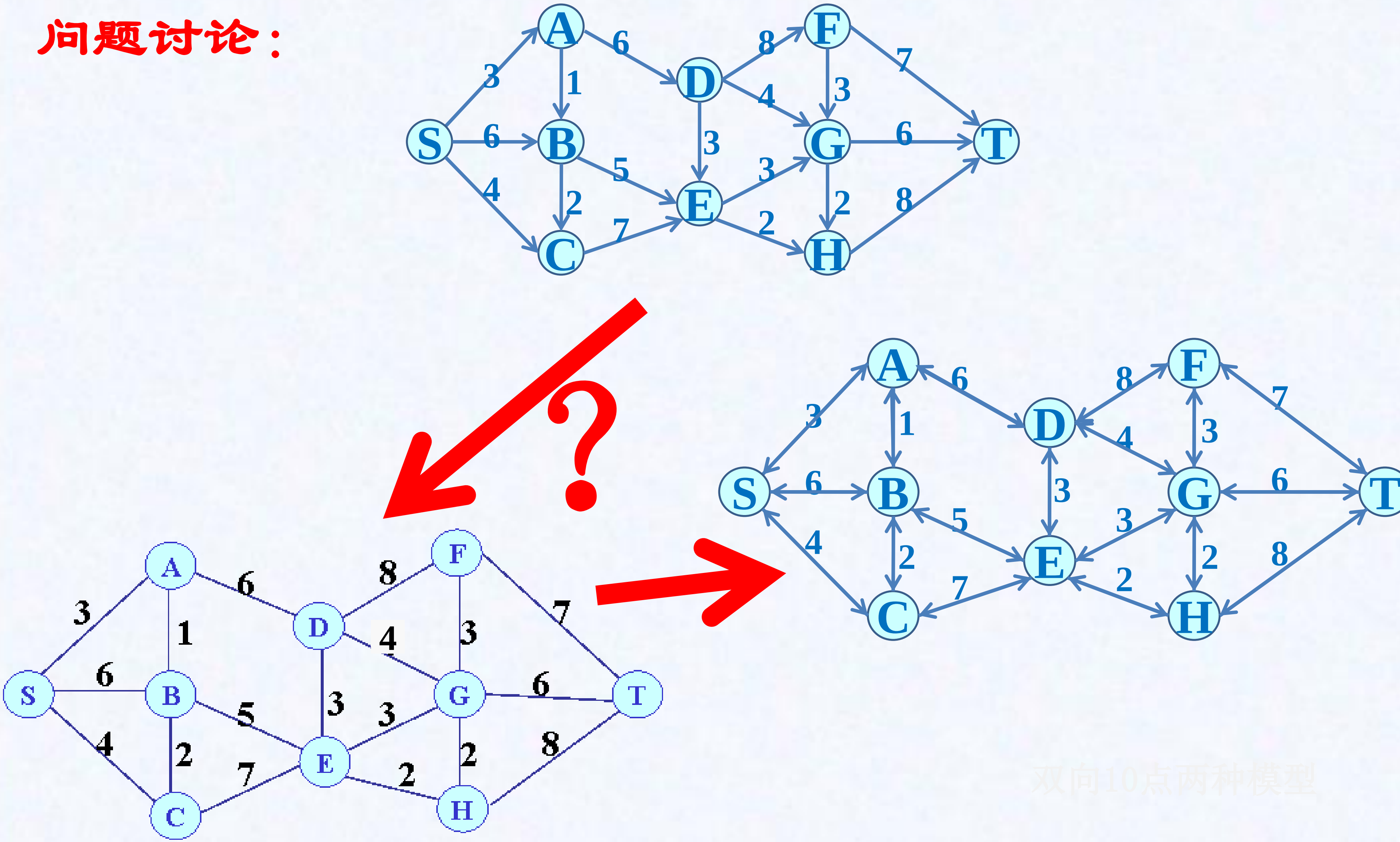


最短路模型

建立最短路模型的关键就是画出系统的网络图

最短路模型

问题讨论：



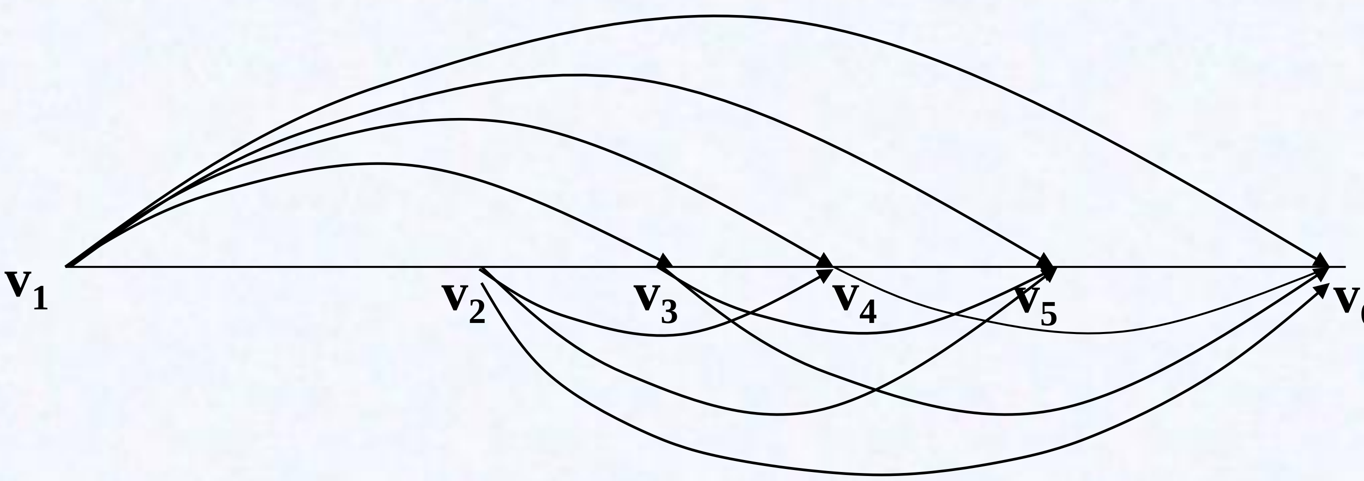
例8.2 设备更新问题。某工厂的某台机器可连续工作5年，决策者在每年年初都要决定机器是否需要更新。若购置新机器，就要支付购置费用；若继续使用，则需要支付维修与运行费用，而且随着机器使用年限的增加费用会逐年增多。已知计划期（5年）中每年的购置价格及维修与运行费用如下表所示。试制定今后5年的机器更新计划使总的支付费用最少。

表 购置价格及维修与运行费用

年限	1	2	3	4	5
购置费（万元）	11	11	12	12	13
维修与运行费（万元）	5	6	8	11	18

最短路模型

将问题转化为最短路问题，如下图：用v_i表示“第i年年初购进一台新设备”，弧（v_i,v_j）表示第i年年初购进的设备一直使用到第j年年初。

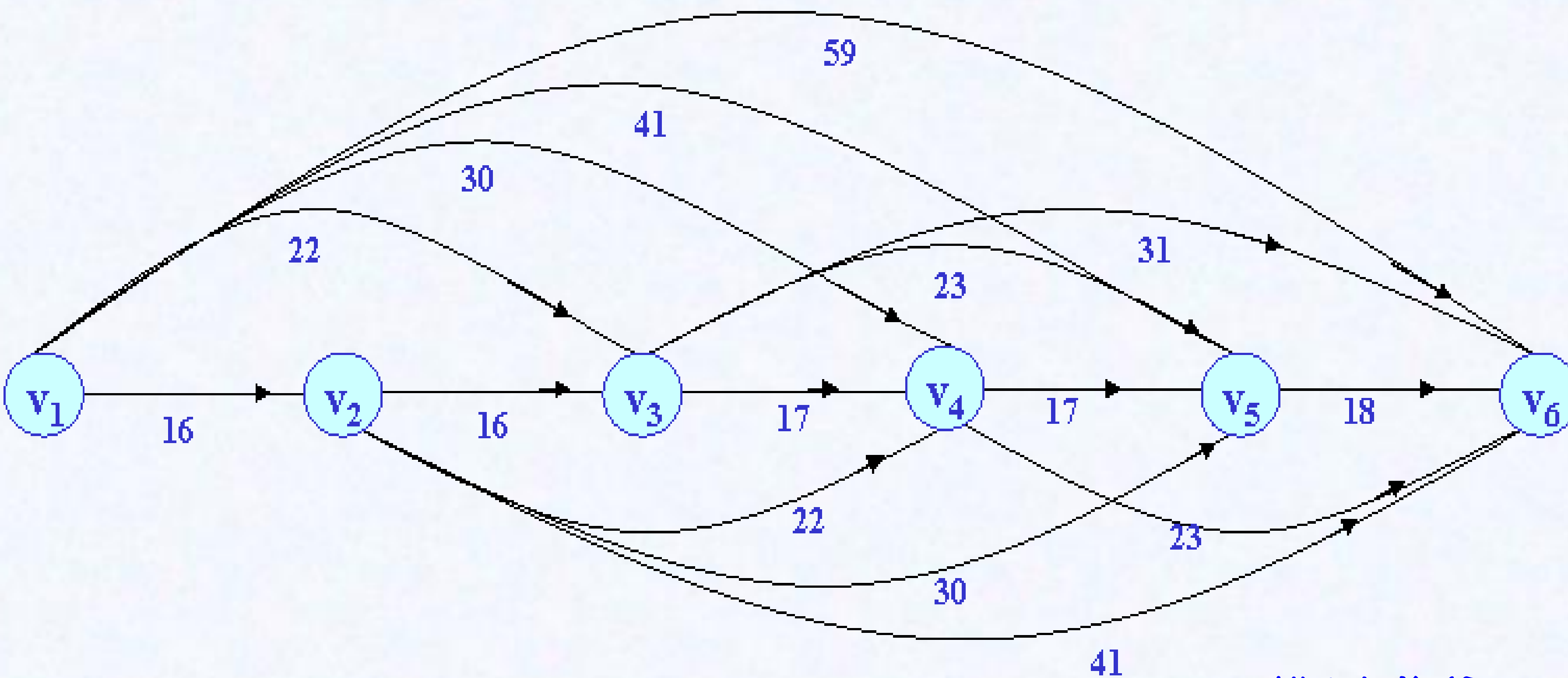


最短路模型

设备使用年限总费用分布情况表　　单位：万元

终止年份 / 费用 / 起始年份	1	2	3	4	5	6
1	-	16	22	30	41	59
2	-	-	16	22	30	41
3	-	-	-	17	23	31
4	-	-	-	-	17	23
5	-	-	-	-	-	18
6	-	-	-	-	-	-

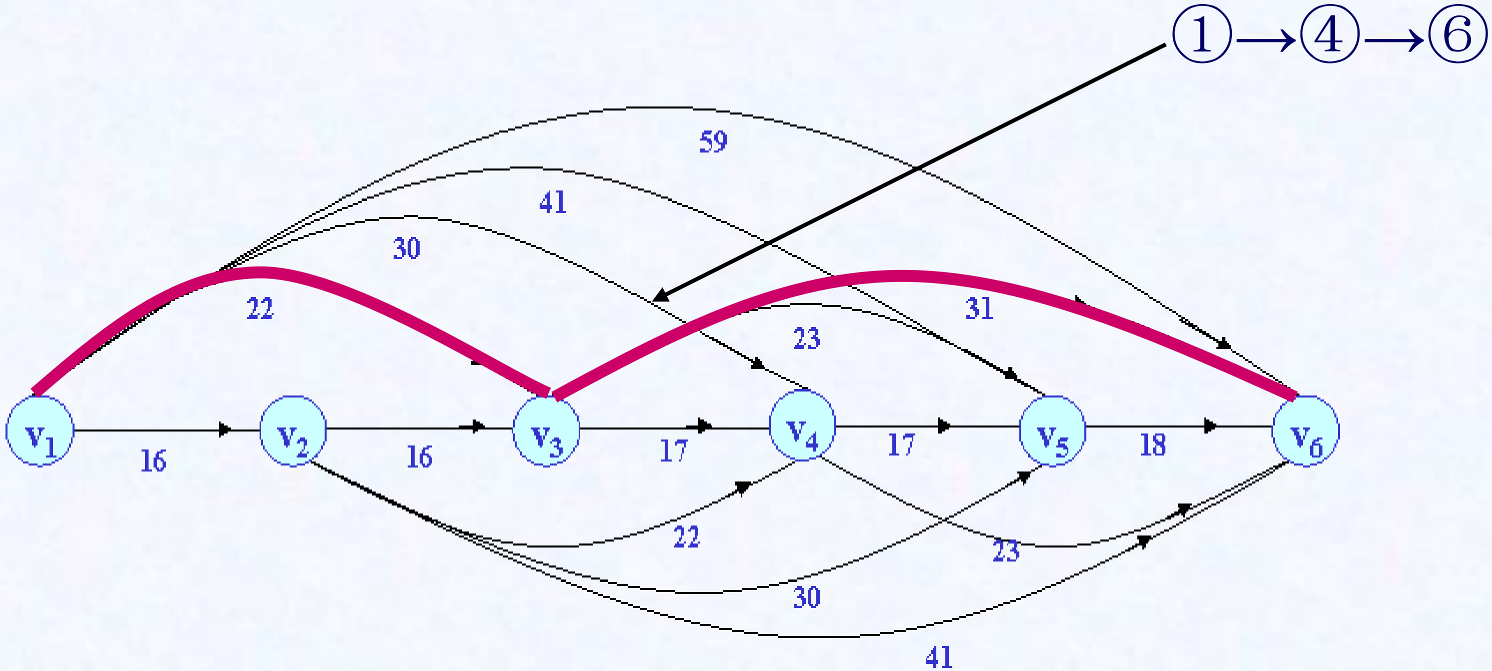
可得网络图



模型求解

最短路模型

可得最短路结果



结果为：①→③→⑥，也就是说第一年初购置新机器，使用到第二年底（第三年初）报废；第四年初再购置新机器，使用到第五年底（第六年初）。支付的费用为最少。

最短路径（需支付的最少费用）为：53（万元）。

最小费用流模型

最小费用流模型要解决的问题：对一有向的赋权图中，指定多个发点和多个收点。目标是使通过网络确定各网路上的流量，使所有发点到所有收点间总流量所花的费用为最小。

最小费用流模型

最小费用流模型的特征

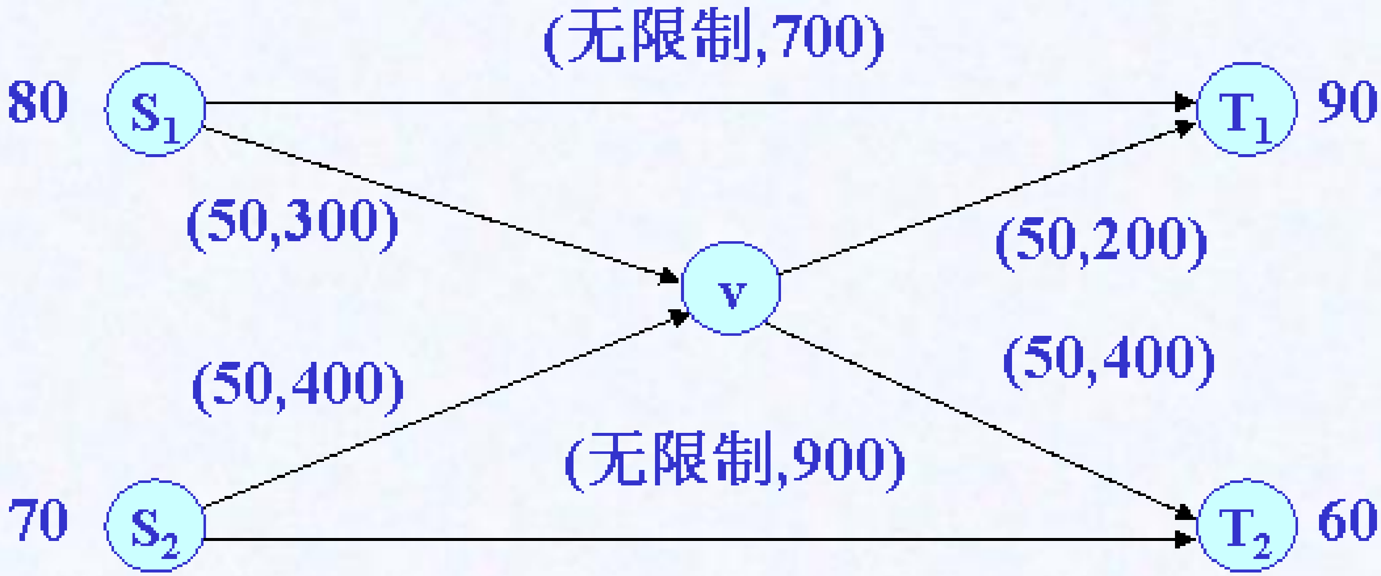
最小费用流问题的构成(网络表示)
- 节点：包括供应点、需求点和转运点
- 弧：可行的线路、流量限制、费用。

最小费用流问题的假设
- 至少一个供应点
- 至少一个需求点
- 剩下都是转运点
- 必须是有向图，各弧容量有限
- 有足够的弧和容量
- 每一条弧的流的成本和流量成正比
- 目标是总成本最小（或总利润最大）

最小费用流问题的解的特征
- 具有可行解的特征
- 具有整数解的特征

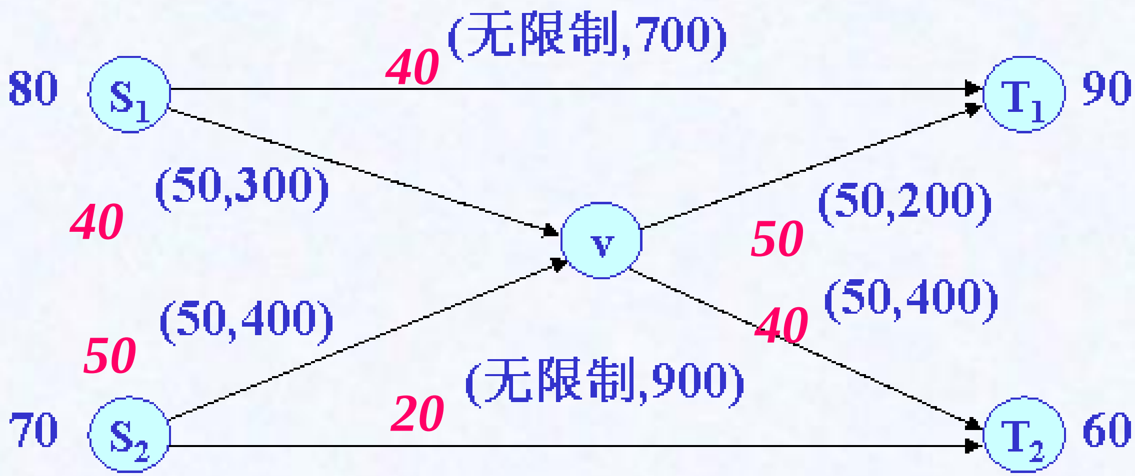
最小费用流模型

例8.3 某公司有两个工厂生产产品，这些产品需要运送到两个仓库中，其配送网络如下图所示（产品数量单位：件；费用单位：元）。**确定一个运输方案（即每条路线运送多少件产品），使运输成本最小。**



最小费用流模型

求解最小费用流问题，实际上就是确定网络图中每条路线上的流量，使总流量所花的费用为最小。因此可以将图中各条边和每条边上的权数直接录入到求解模型中，实现计算机求解。因此可以称下图就是一个最小费用流问题的数学表述模型。



关键点：所有发点的净流出量为正，所有收点的净流出量为负，所有中间点的净流出量为0。

总的费用流：104000（元）

模型求解

问题讨论1

可不可以用最小费用流模型求解第六讲中的运输问题？

最大流模型

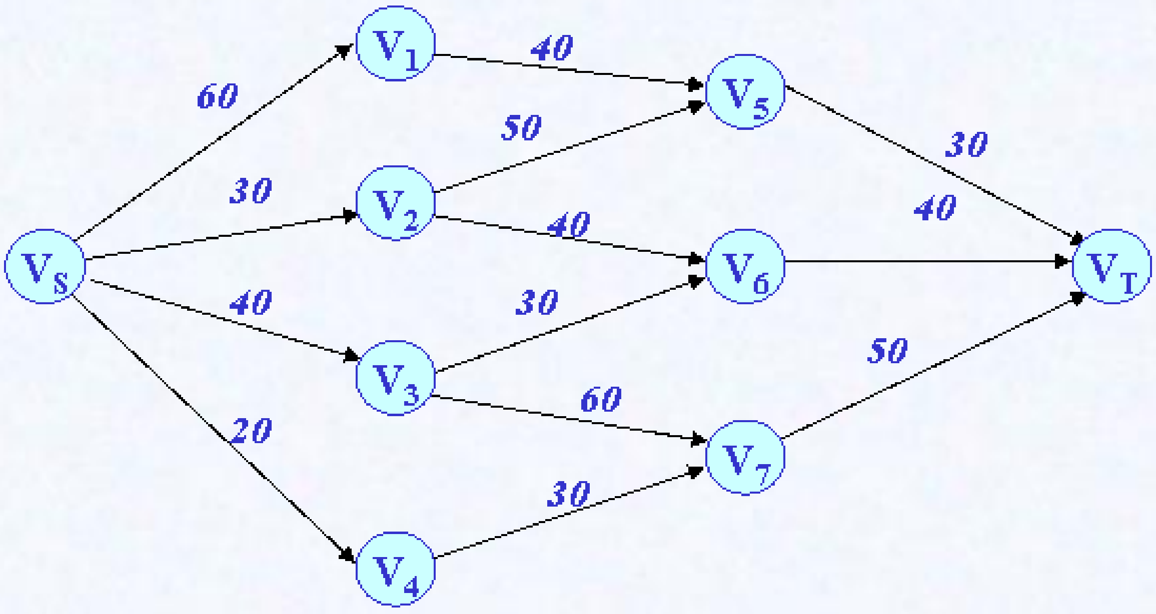
最大流模型要解决的问题：对一有向的赋权图中，指定一个发点和一个收点。目标是确定各网络上的流量，使发点到收点间总流量为最大。

最大流模型

最大流模型的特征：

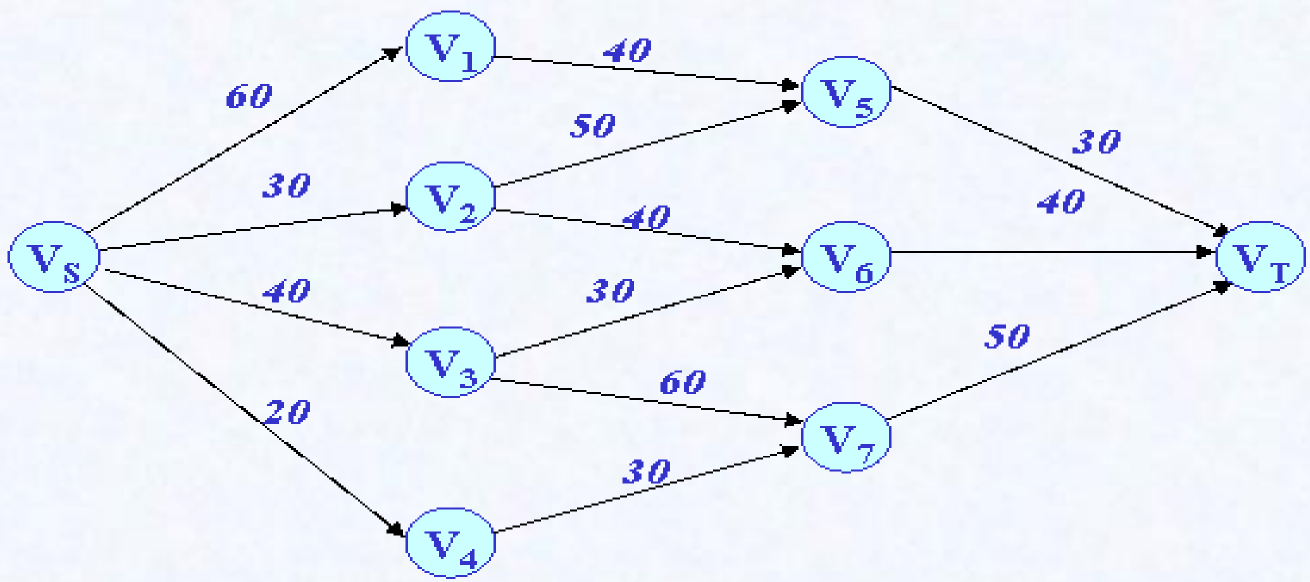
- 网络中所有流起源于发点，所有的流终止于收点
- 其余的节点叫做转运点
- 通过每一条弧的流只允许沿着弧的箭头方向流动
- 目标是使得从发点到收点的总流量最大

例8.4 某石油公司有一个管道网络，使用这个管道网络可以将石油从采油场运送到一些销售点，这个网络的一部分如下图所示。由于管道直径不同，各段管道的流量也不一样，在图中每个弧（每段管道）上标的数字是该段管道的最大流量（吨/小时）。如果使用这个网络系统从采油场V_S向销地V_T运送石油，每小时最多能运送多少吨石油？



最大流模型

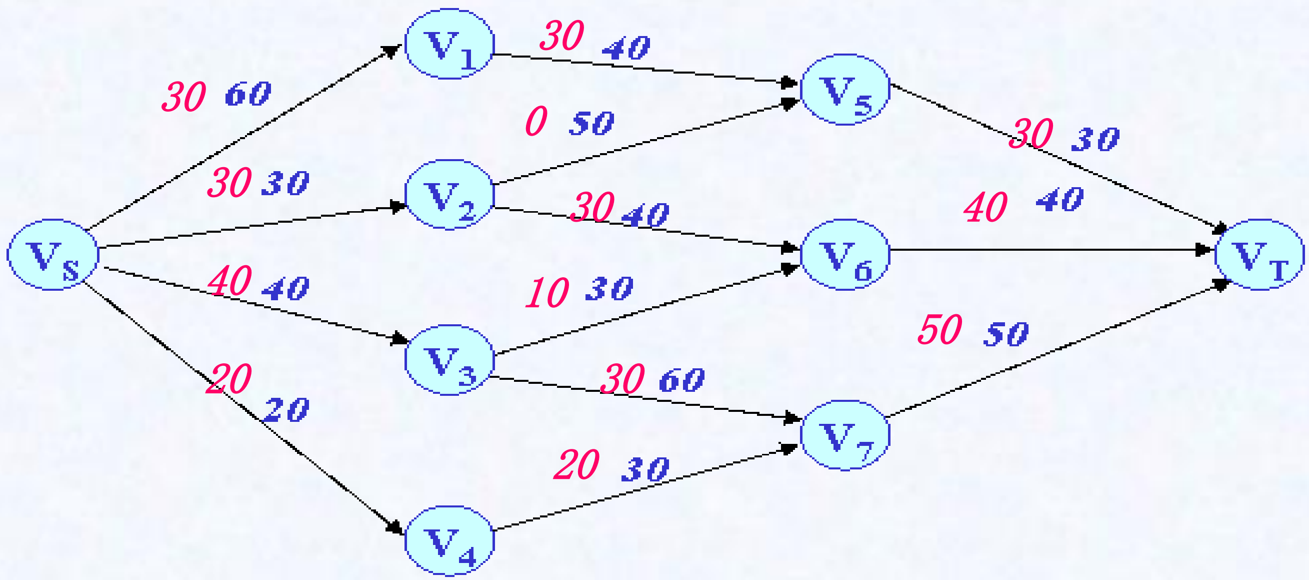
求解最大流问题，实际上就是确定网络中每条路线上的流量，使整个网络中的总流量为最大。因此也可以将图中各条边和每条边上的权数直接录入到求解模型中，实现计算机求解。因此可以称下图就是一个最大流问题的数学表述模型。



关键点：所有发点和收点的净出量为空（待求），所有中间点的净流出量为0。

最大流模型

求解结果



最优值　max z=120

最大流模型

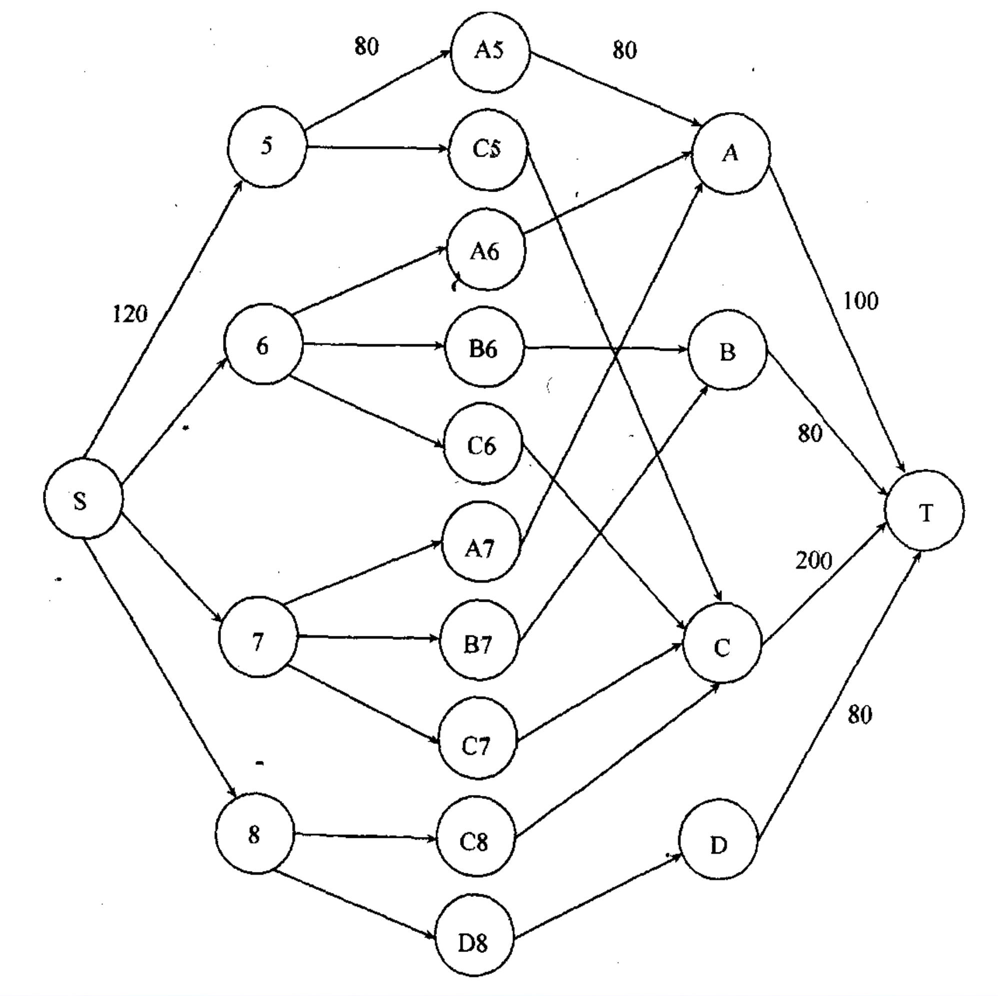
例8.5 计划编制问题。某市政工程公司在5-8月份内需完成4项工程：修建一条地下通道、修建一座人行天桥、新建一条道路及道路维修。工期和所需劳动力见下表。该公司共有劳动力120人，任一工程在一个月内的劳动力投入不能超过80人，问公司应如何分配劳动力以完成所有工程，是否能按期完成？

工期和所需劳动力

工程	工期	需要劳动力（人）
A．地下通道	5-7月	100
B．人行天桥	6-7月	80
C．新建道路	5-8月	200
D．道路维修	8月	80

最大流模型

根据要求可画网络图如下:



图中:s 表示开工

t表示工程结束

5表示月份

6表示月份

7表示月份

8表示月份

A表示工程

B表示工程

C表示工程

D表示工程

模型求解

最大流模型

求得结果如下表：

每个月的劳动力分配结果

月份	投入劳动力	项目A	项目B	项目C	项目D
5	120	40		80	
6	120	40	80		
7	100	20		80	
8	120			40	80
合计	460	100	80	200	80

最优值： 460

最小费用最大流模型

最小费用最大流模型要解决的问题：对一有向的赋权图中，指定一个发点和一个收点。目标是在网络系统中不仅要追求运量最大，还要考虑总费用最小 。

最小费用最大流模型

最小费用最大流模型的特征：

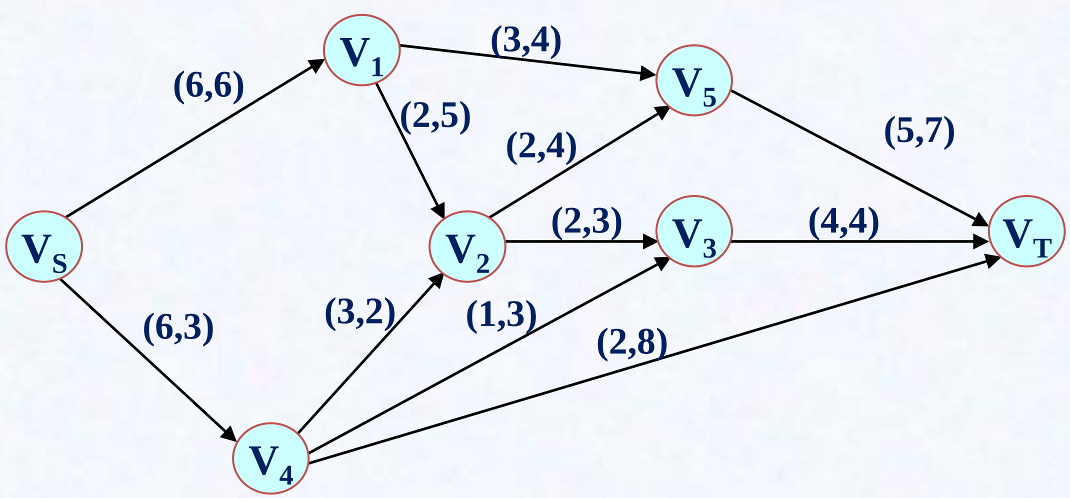
- 给定一个带收点和发点的网络
- 每条弧上给出容量
- 每条弧上同时还给出单位流量的费用
- 要求确定网络的最大流量，同时还要使总的费用最小

解决方法：

第一步：先求出此网络系统的最大流量F

第二步：在最大流量F的所有方案中，选出一个费用最小的方案

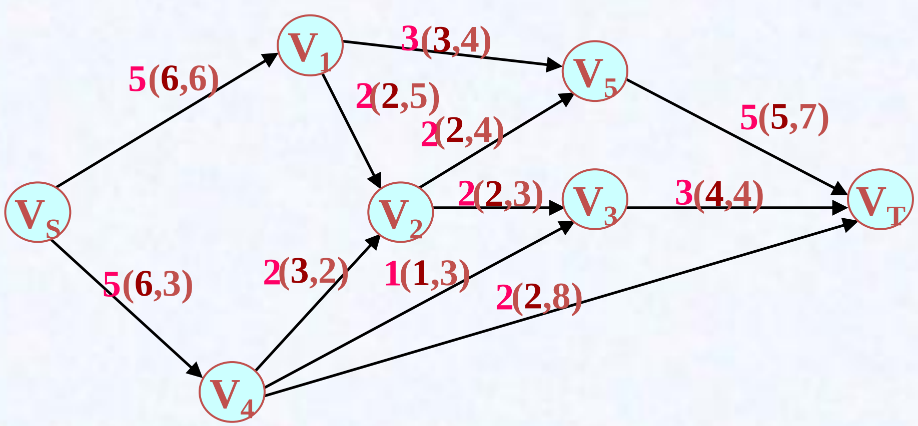
例8.6 某石油公司有一个管道网络，使用这个管道网络可以将石油从采油场V_s运送到一些销售点V_t，这个网络的一部分如下图所示。由于管道直径不同，输油管道长短也不一样，使得各段管道除了流量不一样外，单位流量的费用也不同。图中每条弧（每段管道）旁的括号中，前一个数字是该段管道的最大流量（吨/小时），后一个数字是该段管道的单位流量的费用（元/吨）。如何安排网络各段的流量，使整个网络系统能运送最多的石油并使得总的运费最小？



最小费用最大流模型

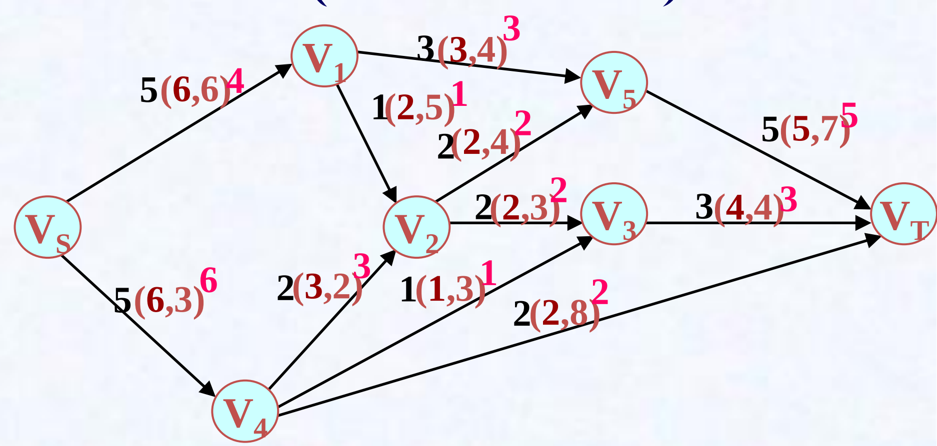
求解最小费用最大流问题，实际上是一个多目标规划问题，而每级目标都建立各自的网络图形式的数学表述模型，用计算机求解。而Excel求解程序模块也与目标规划的求解方法一样，可以将两个目标的模型一次求解（如下图）。

第一级（最大流）



系统最大流：10

第二级（最小费用流）



系统最小费用流：145

用表格形式表述该结果

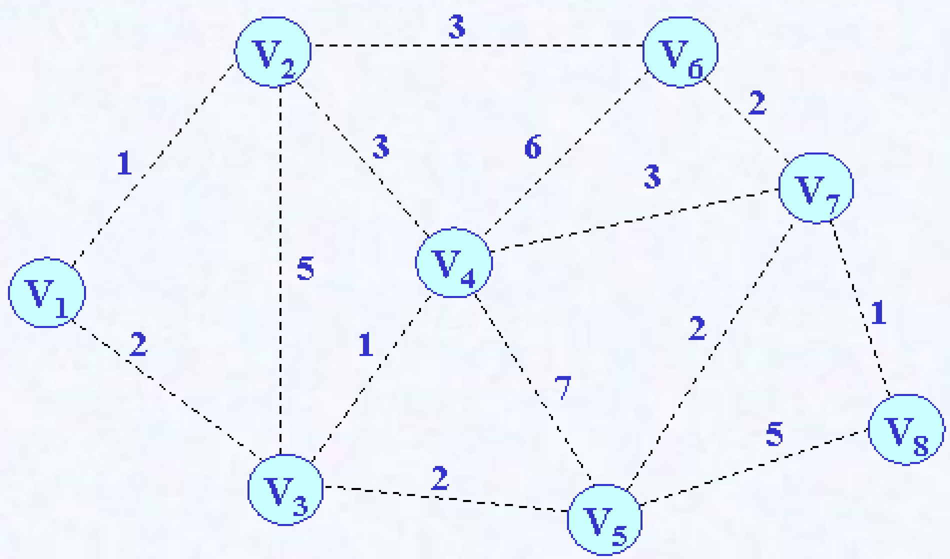
发点	收点	容量	单位费用	最优流量	实际费用	净流量
vs	v1	6	6	4	24	4
vs	v4	6	3	6	18	6
v1	v5	3	4	3	12	
v1	v2	2	5	1	5	
v4	v2	2	4	2	8	
v4	v3	2	3	2	6	
v4	vt	3	2	3	6	
v2	v5	1	3	1	3	
v2	v3	2	8	2	16	-2
v5	vt	5	7	5	35	-5
v3	vt	4	4	3	12	-3
合计					145	10

最小支撑树模型

最小支撑树模型要解决的问题：对给定的无向的赋权图中，确定一个树，目标是该树的各边权数之和为最小。

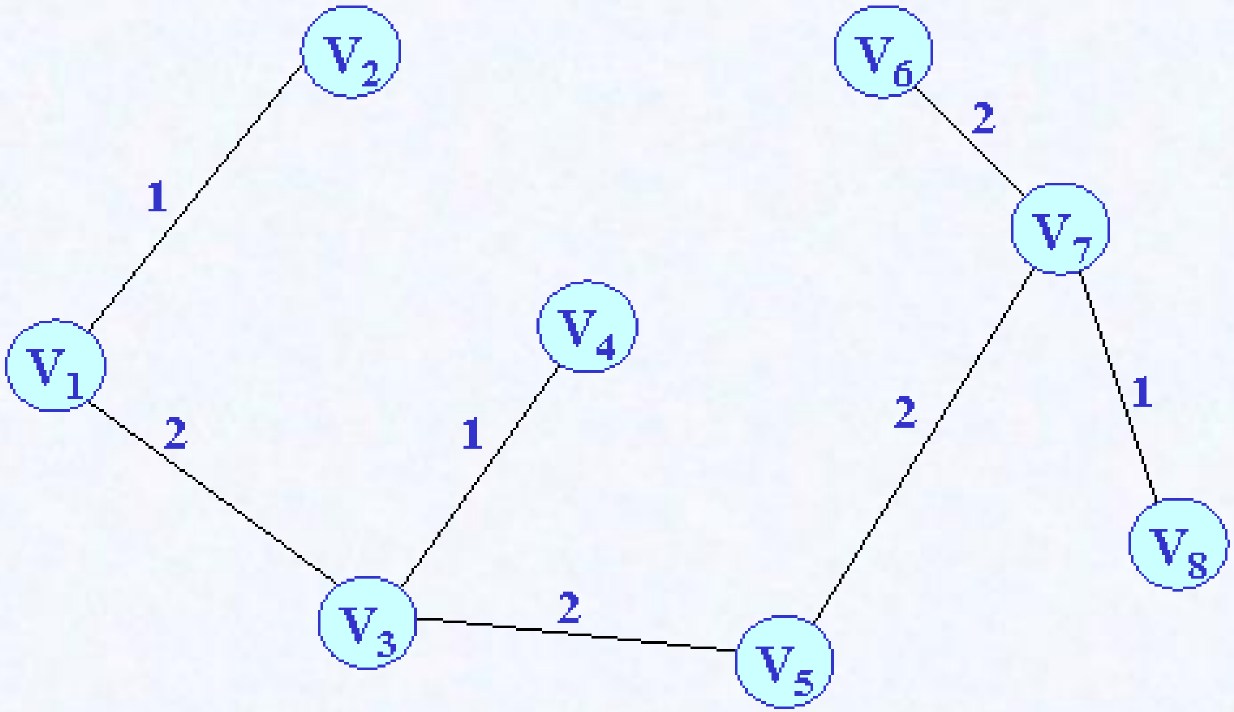
最小支撑树模型

例8.7 某公司铺设光导纤维网络问题。公司的管理层已经决定铺设最先进的光导纤维网络，为公司的主要部门之间提供高速通信（数据、声音和图像）。下图中的节点显示了该公司主要部门（包括公司的总部、巨型计算机、科研区、生产和配送中心等）的分布图。虚线是铺设纤维光缆的可能位置。每条虚线旁边的数字表示了如果选择在这个位置铺设光缆需要花费的成本（单位：万元）。



最小支撑树模型

需要确定的公司光纤的最小支撑树如下图



树中各边权数之和（该光纤网络所需的成本为）：

1＋2＋1＋2＋2＋1+2=11（万元）

最小支撑树模型

最小支撑树模型的特征：

- 在网络图中，所有节点构成连通图，但没有回路（圈）
- 构成连通图的边都赋有相应的权数，且边数总比节点数少一个
- 若去掉任意一条边，必变为不连通
- 若不相邻顶点连一条边，恰得一回路（圈）
- 在所有满足上述四条要求的组成方案中，构成树的各边权数之和为最小

最小支撑树模型

最小支撑树模型的求解

贪婪法求解（手工）

破圈法求解（手工）

计算机程序模块求解（基于贪婪法）

最小支撑树模型

最小支撑树模型的求解------贪婪法

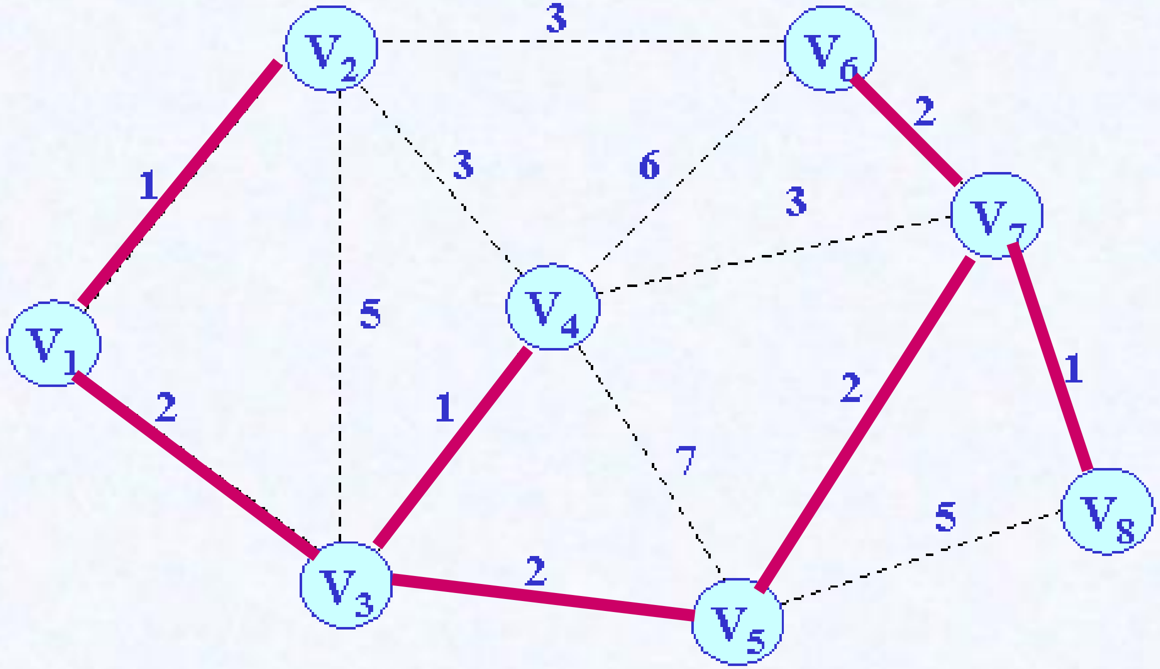
1、选择第一条边：选择成本最低的备选边

2、选择下一条边：从剩下的边中取一条边满足：

（a）最小边；（b）不构成圈。

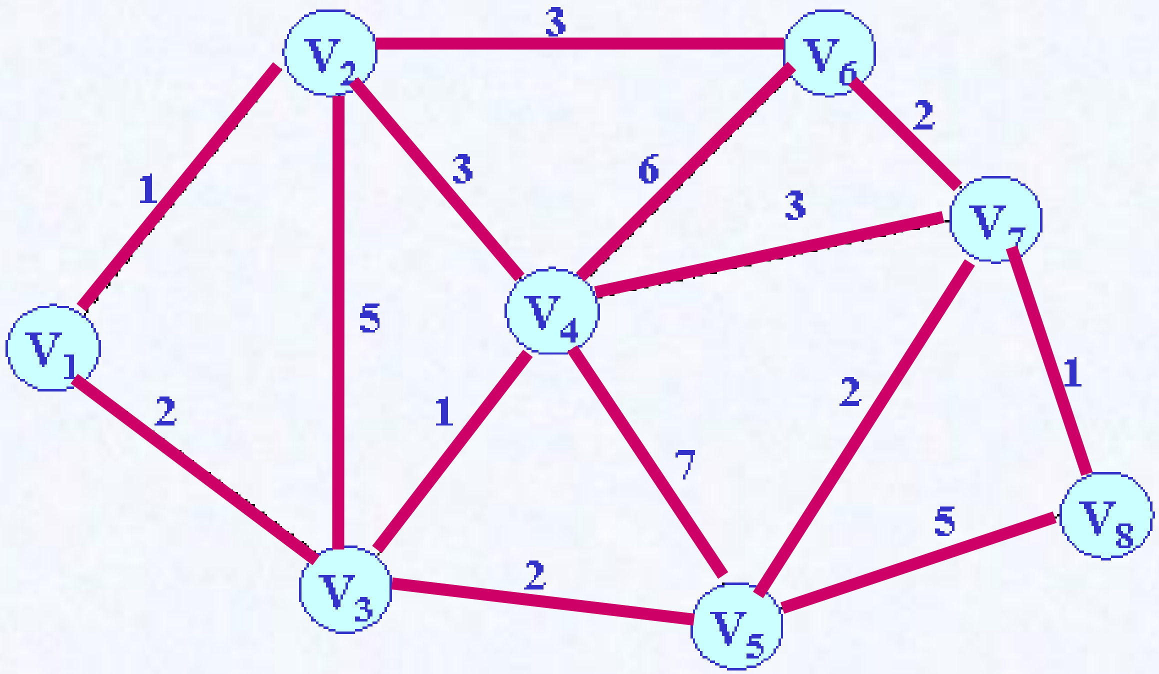
3、重复步骤2，直到选取的边数为节点数－1。此时就得到了最优解（最小支撑树）

最小支撑树模型

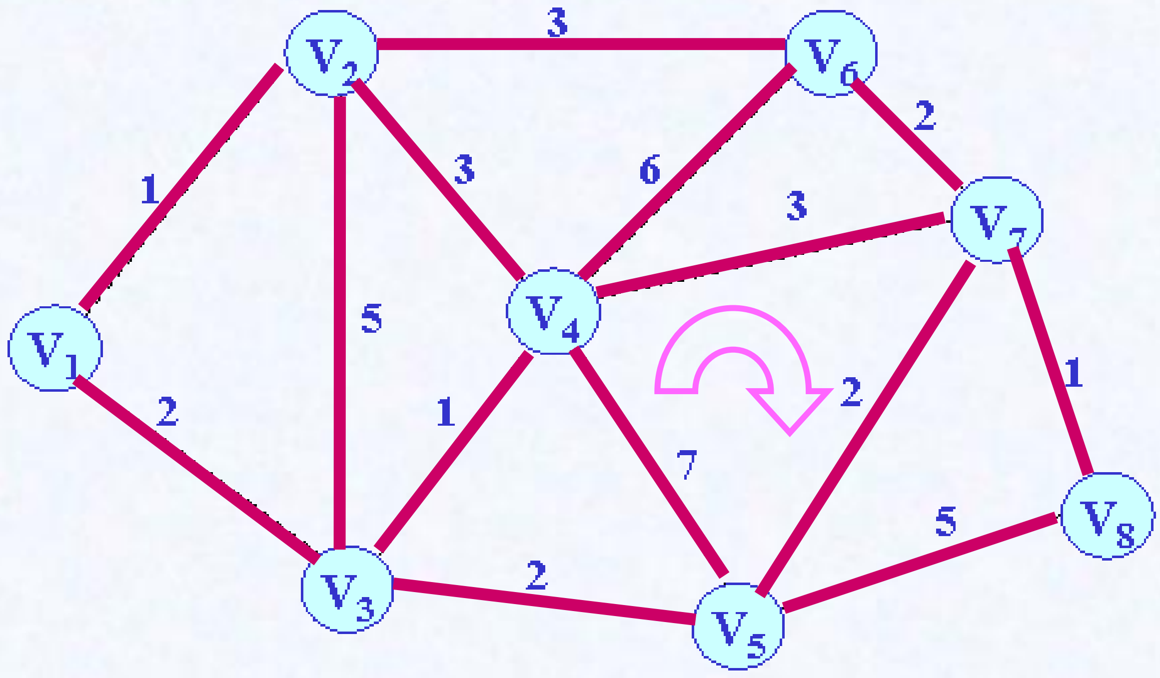


该光纤网络所需的成本为： 1＋ 1＋1＋2＋2＋2＋2=11（万元）

最小支撑树模型

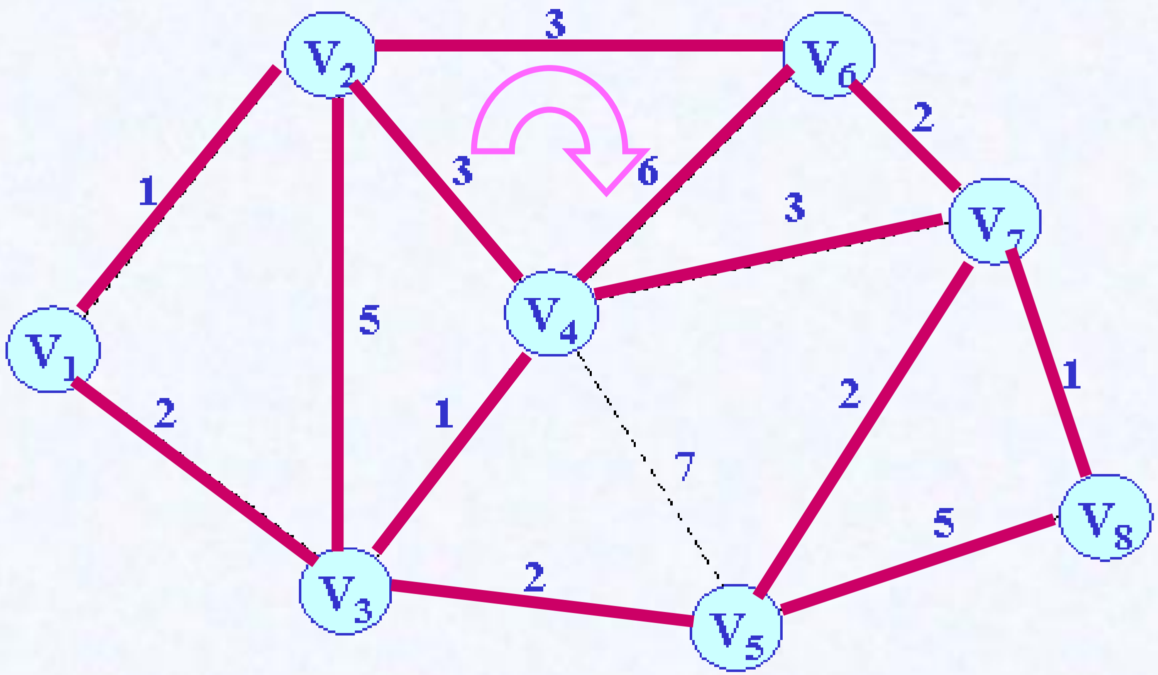


最小支撑树模型的求解------破圈法



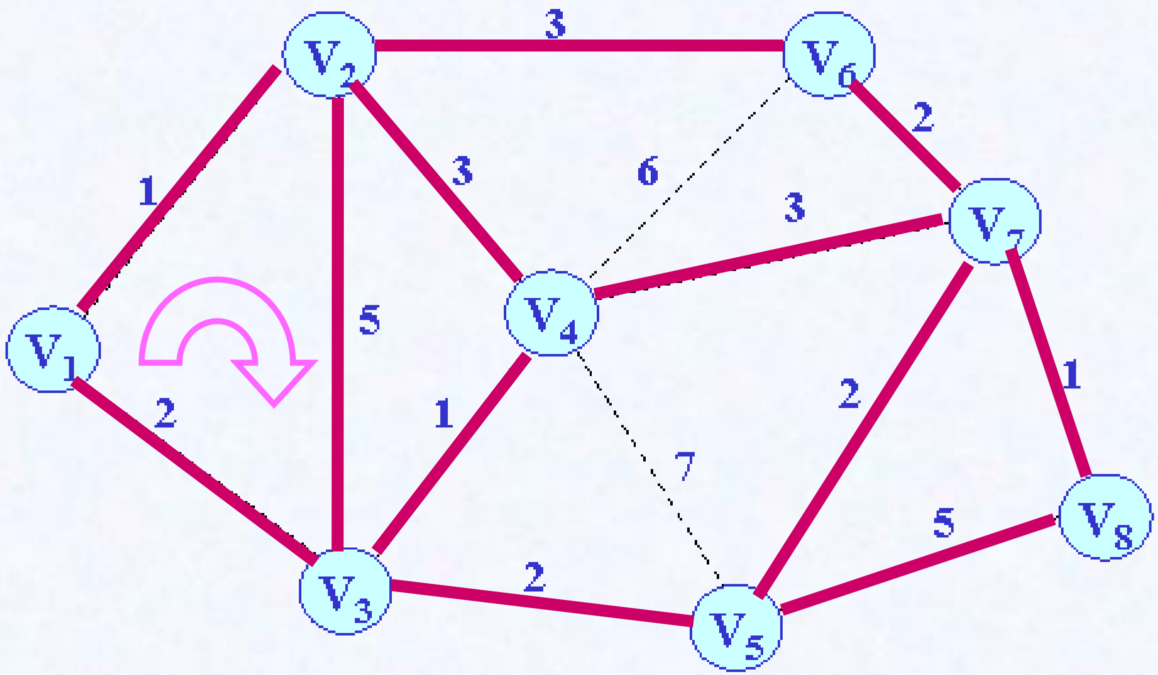
最小支撑树模型

最小支撑树模型的求解——————破圈法

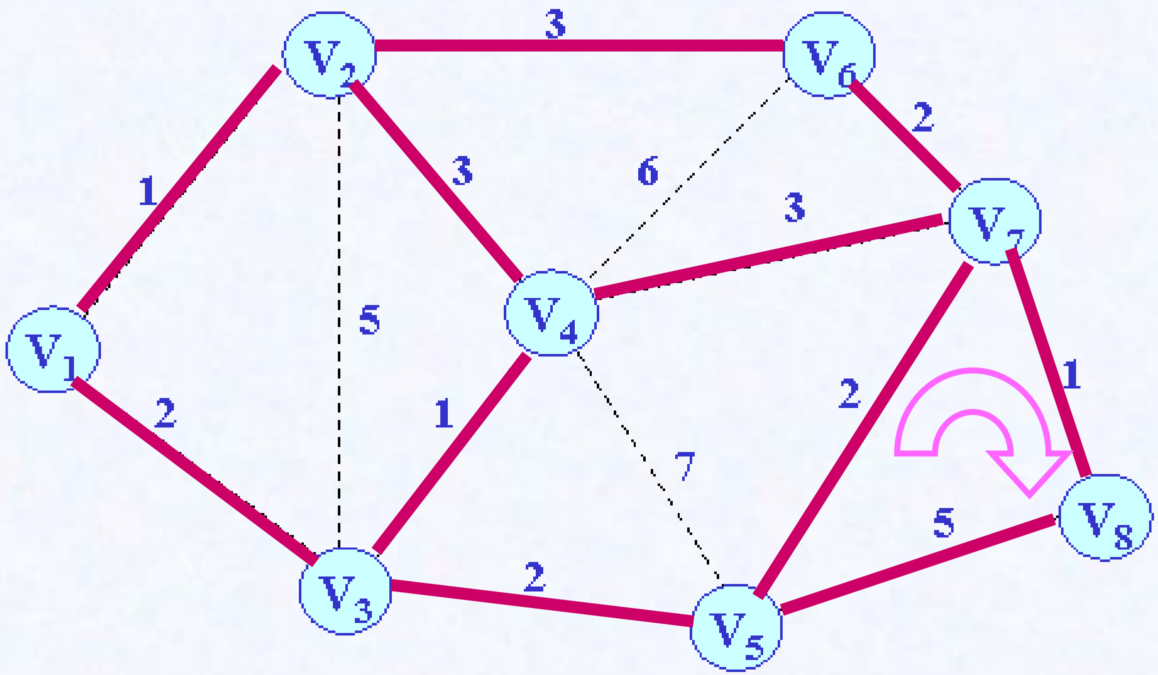


最小支撑树模型

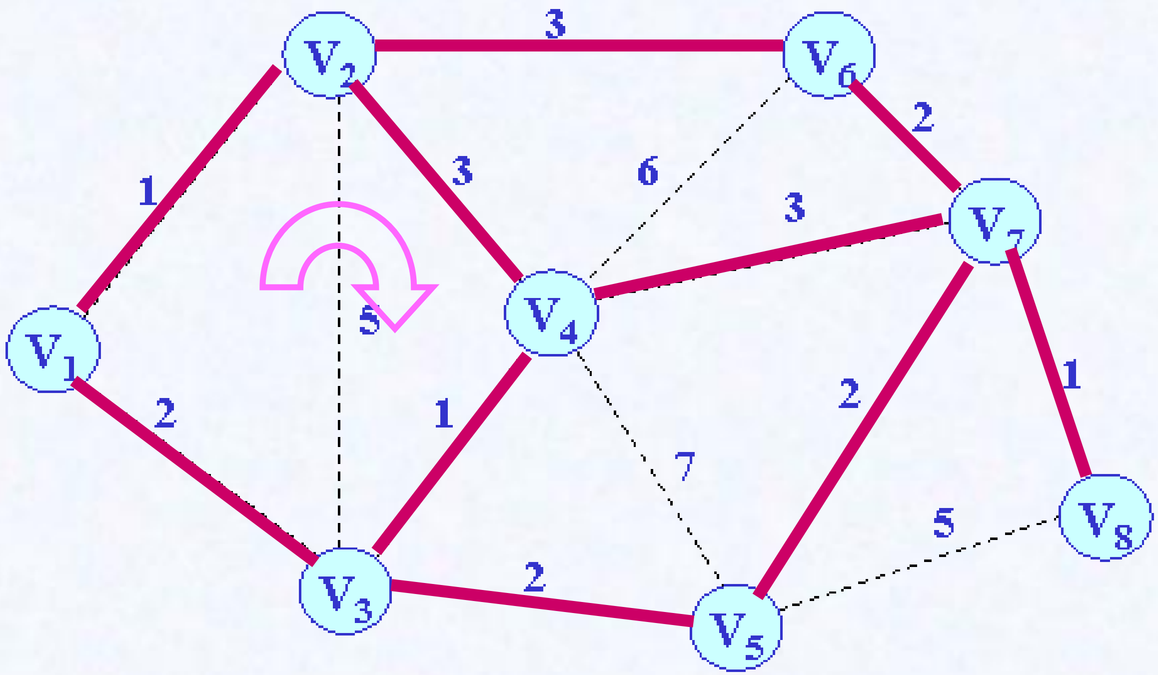
最小支撑树模型的求解------破圈法



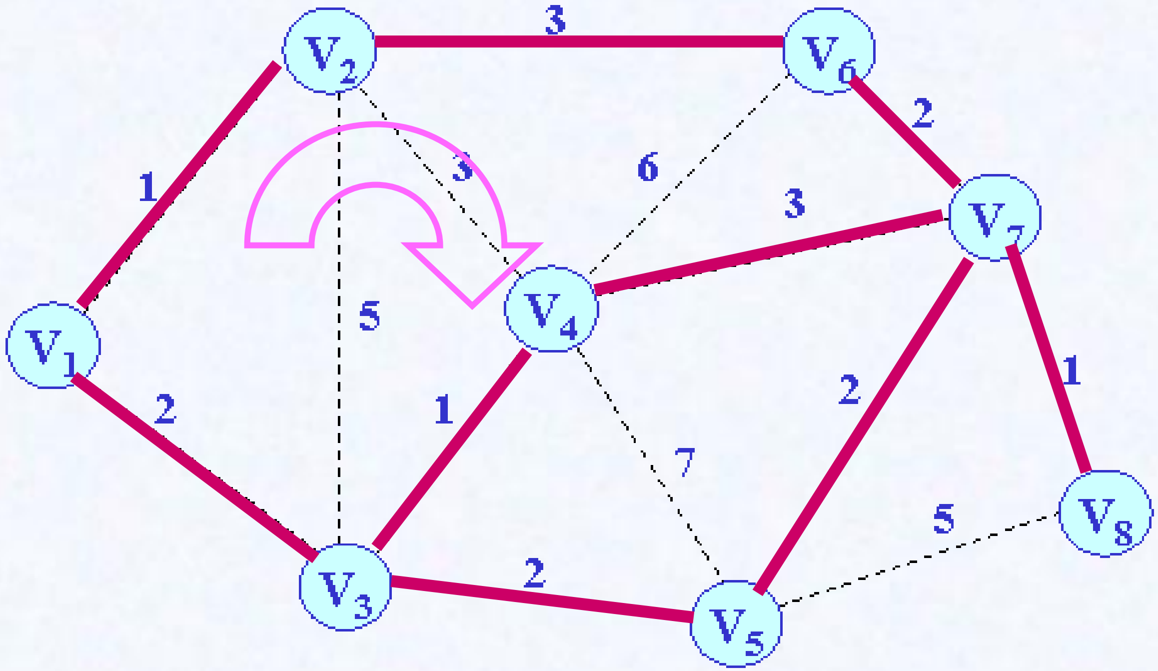
最小支撑树模型的求解——————破圈法



最小支撑树模型的求解——————破圈法

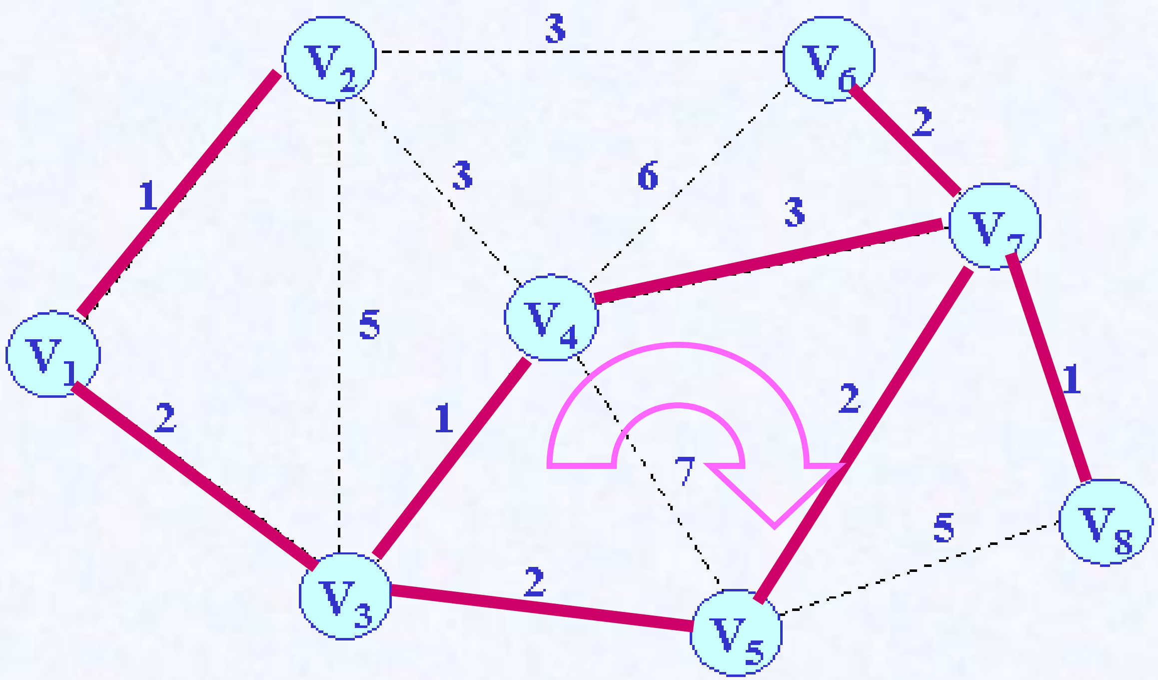


最小支撑树模型的求解------破圈法



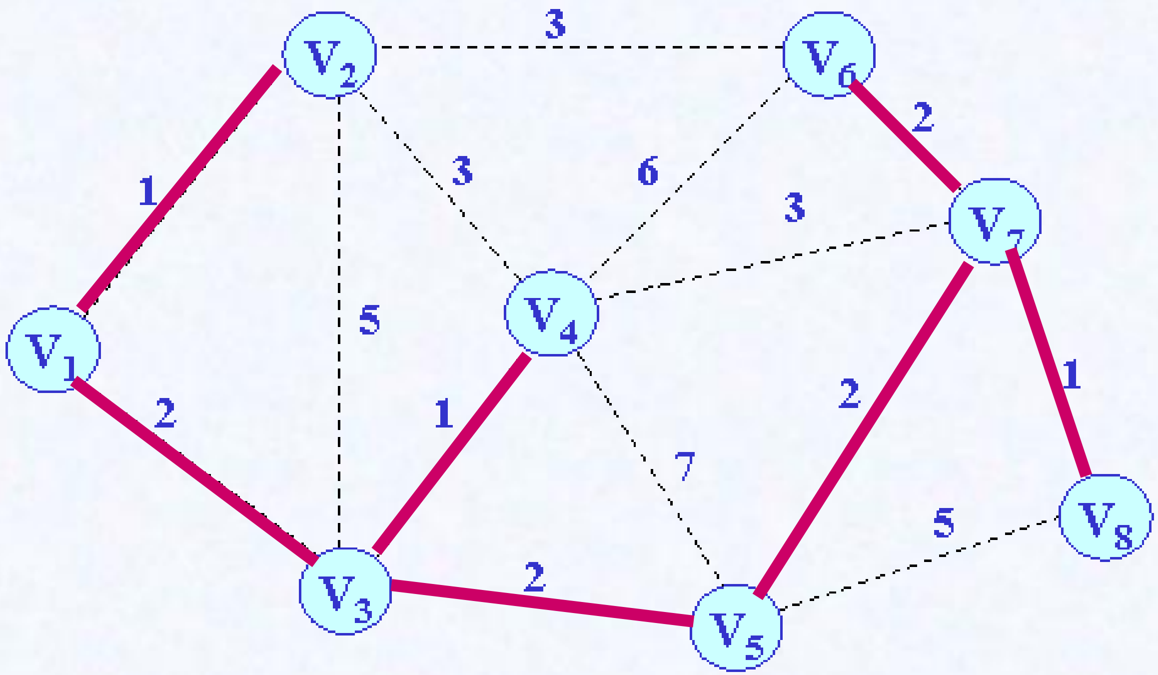
最小支撑树模型

最小支撑树模型的求解——————破圈法



最小支撑树模型的求解——————破圈法

该光纤网络所需的成本为：1＋1＋1＋2＋2＋2＋2=11（万元）



课堂练习1

模型求解某乡政府计划未来3年内，使所管辖的10个村与村之间都实现村村通公路。根据勘测，10个村之间修建公路的费用如下表所示，**问乡政府如何选择修建公路的路线才能使总的修路成本最低。**

10 个村之间修建公路的费用表

	两村庄之间修建公路的费用（万元）									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		12.8	10.5	8.5	12.7	13.9	14.8	13.2	12.7	8.9
2			9.6	7.7	13.1	11.2	15.7	12.4	13.6	10.5
3				13.8	12.6	8.6	8.5	10.5	15.8	13.4
4					11.4	7.5	9.6	9.3	9.8	14.6
5						8.3	8.9	8.8	8.2	9.1
6							8.0	12.7	11.7	10.5
7								14.8	13.6	12.6
8									9.7	8.9
9										8.8
10										

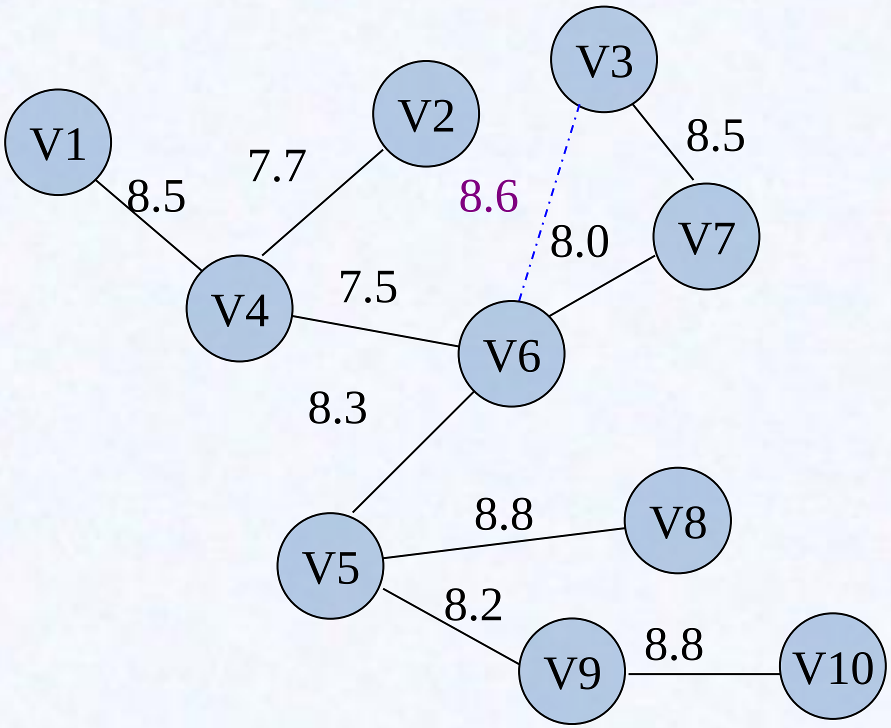
课堂练习1

模型求解某乡政府计划未来3年内，使所管辖的10个村与村之间都实现村村通公路。根据勘测，10个村之间修建公路的费用如下表所示，**问乡政府如何选择修建公路的路线才能使总的修路成本最低。**

10 个村之间修建公路的费用表

	两村庄之间修建公路的费用（万元）									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		12.8	10.5	8.5	12.7	13.9	14.8	13.2	12.7	8.9
2			9.6	7.7	13.1	11.2	15.7	12.4	13.6	10.5
3				13.8	12.6	8.6	8.5	10.5	15.8	13.4
4					11.4	7.5	9.6	9.3	9.8	14.6
5						8.3	8.9	8.8	8.2	9.1
6							8.0	12.7	11.7	10.5
7								14.8	13.6	12.6
8									9.7	8.9
9										8.8
10										

课堂练习1



最优值： 7.5+7.7+8.0+8.2+8.3+8.5+8.5+8.8+8.8=74.3（万元）

本章小结

重点内容：

1. 各种模型的实际应用

THE END，Thanks！